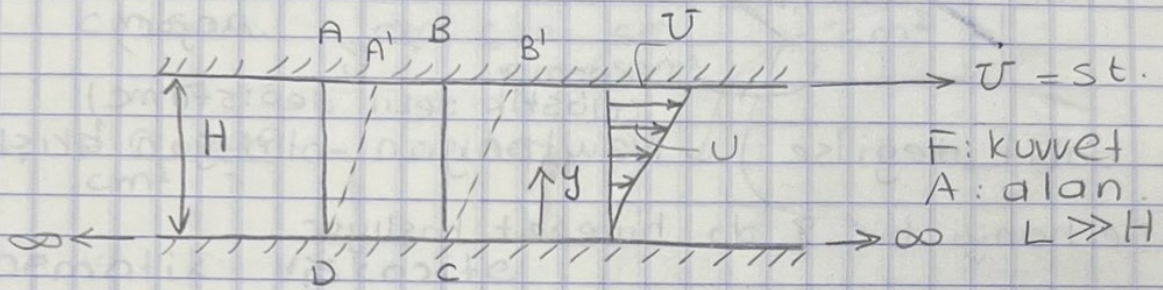


AKIŞKANLAR MEKANİĞİ

CANER ŞENTÜRK

Akışkan: Akışkan bir kayma gerilmesi altında uygulanan gerilme ne kadar ufak olursa olsun, sürekli olarak şekil değiştiren maddedir. Kayma gerilmesi bir yüzeye teğet olan ve birim alana etkiyen kuvettir.



Alt yüzeyde levha durduğu için, akışkanın hızı sıfır.

$$\frac{dU}{dy} = \text{sabit}$$

$$\tau = \frac{F}{A} \text{ ; Kayma gerilmesi}$$

$$F = \mu \frac{A \cdot U}{H} \quad (\text{DeneySEL sonuç})$$

μ : mutlak viskozite.

(Akışkanın moleküler yapısından)

kaynaklanan bir özellik.

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{H} = \mu \frac{dU}{dy}$$

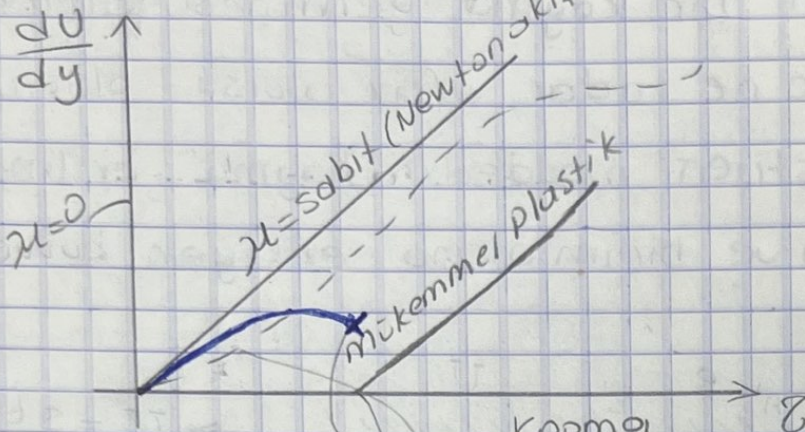
$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

Genel formül

Hareket olmayan bir ortamda $\tau = 0$

Kayma gerilmesinin var olması için bir harekette bir hız gradyanı $\left(\frac{dU}{dy}\right)$ olmalıdır. Hareketsiz bir akışkana sadece normal gerilmeler (basınç gerilmeleri) etki eder.

$\mu = \text{sabit} \neq f\left(\frac{du}{dy}\right)$ (μ sabit ise böyle akış-
konludur) Newtonyan akışkan denir.



$\mu = 0$ ise

Mükemmel akışkan
veya ideal akışkan
denir.
(Akış. sürtünme yarat-
mıyor)

μ sabit değilse Newtonyan olmayan akışkan,

Herhangi bir τ da hareket başlıyor.

Akışkanlar (Sıvılar ve Gazlar) -

A) 1-) Mükemmel akışkan ($\mu = 0$) $\rightarrow Re = \infty$

2-) Viskoz (Sürtülmeli) akışkan ($\mu \neq 0$) $\rightarrow Re \rightarrow \text{sonlu}$

$$Re = \frac{U \cdot L}{\mu / \rho}$$

$$\mu / \rho = \nu \rightarrow \text{kinematik viskozite}$$

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu} \rightarrow \text{Reynolds}$$

B) 1-) Sıkıştırılamaz akışkan $\rightarrow M = 0$ ($a = \infty$)

2-) Sıkıştırılabilir akışkan $\rightarrow M > 0$ Ses her yerde anında duyulabiliyor.

$$Mach = \frac{U}{a} \rightarrow \text{akışkan hızı} \rightarrow \text{ses hızı}$$

(Normalde 340 m/s hızla yayılıyor)

Viskozitenin Birimleri.

$$F = \mu \frac{A \cdot U}{H}$$

M: Kütle
L: Uzunluk
T: zaman

$$M \cdot \frac{L}{T^2} = [\mu] \frac{L^2 \cdot \frac{L}{T}}{L} \rightarrow [\mu] = \frac{M}{L \cdot T} \left(\frac{\text{gr.}}{\text{cm} \cdot \text{san.}} \right)$$

$$\mu = \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{san.}} = \frac{\text{gr. cm}}{(\text{san})^2} = \frac{\text{din}}{\text{cm}^2} \cdot \text{san.}$$

$$\mu = \frac{\text{din} \cdot \text{san}}{\text{cm}^2} = \text{poise}$$

* Kinematik viskozite

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{san.}}}{\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{san.}}$$

$$\nu = \frac{\text{cm}^2}{\text{san}} = \text{Stoke}$$

$$\text{Hava} \rightarrow \mu = 1,8 \times 10^{-4} \text{ poise} \quad \nu = 0,15 \text{ cm}^2/\text{san} (20^\circ)$$

$$\text{Su} \rightarrow \mu = 1 \times 10^{-2} \text{ poise} \quad \nu = 1 \times 10^{-2} \text{ stoke} (20^\circ)$$

$$\text{Benzin} \rightarrow \mu = 0,5 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

$$\text{Zeytinyağı} \rightarrow \mu = 40 \times 10^{-2} \text{ poise}$$

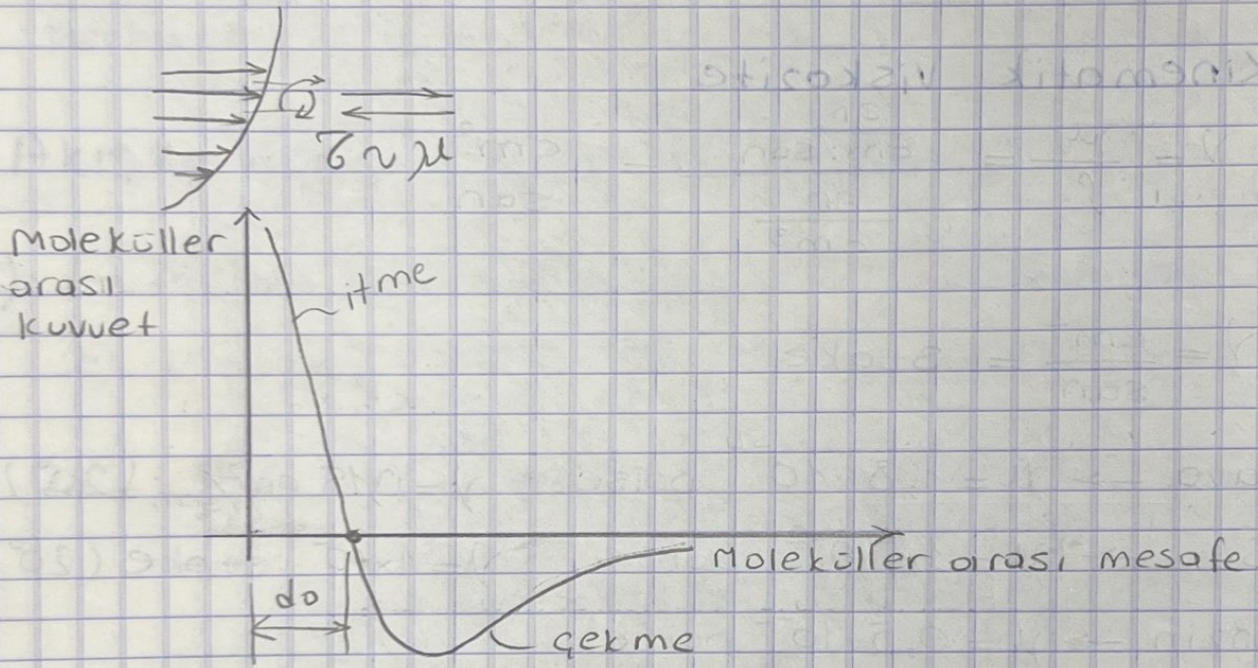
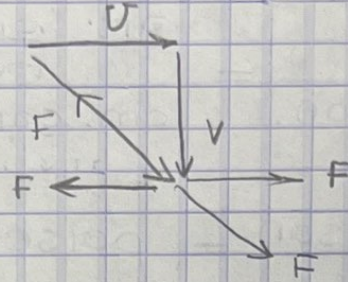
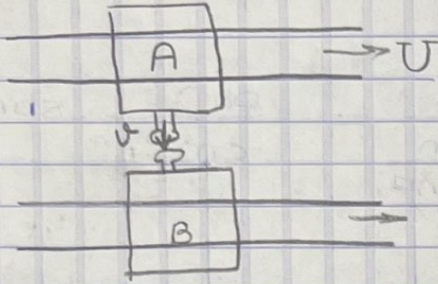
Sıvılarda $T \uparrow$ ça $\mu \downarrow$ (Denizaltılarda dış kısım ısıtılır - rak viskozite azaltılır ve sürtünme azaltılır)

Gazlarda tam tersi $T \uparrow$ ça $\mu \uparrow$

Sıvı ve gazlarda viskozite:

Viskoziteyi yaratan 2 neden var.

- Kohезyon (çekim kuvveti).
- Molekölseel momentum transferi



Sıvılarda : $\sim d_0$ (moleküller arası mesafe)

Gazlarda : $\sim 10 d_0$

Gazlarda çekme kuvveti (kohезyon)

çok ufak. Sıvılarda a nedeni yaratıyor viskoziteyi, gazlarda ise b nedeni.

$T \uparrow$ moleküller daha enerjik ve titreşiyor

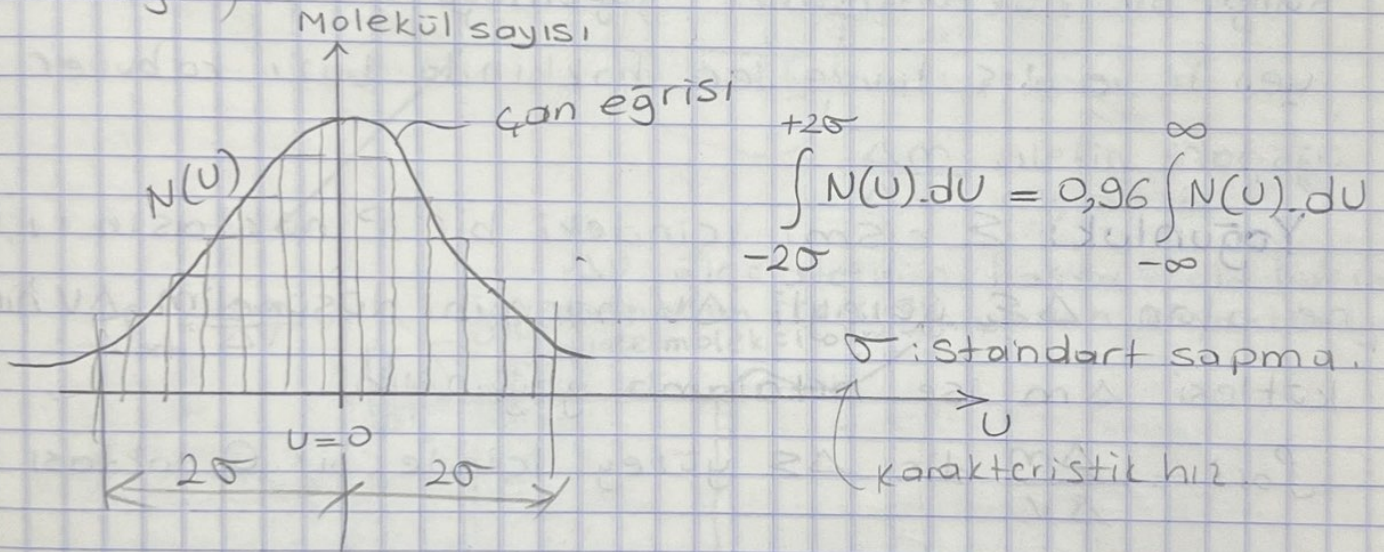
Gazlarda $T \uparrow$ $\mu \uparrow$

Sıvılarda ise $T \uparrow$ $\mu \downarrow$ kohезyon azaldığı için ki (viskoziteyi yaratan bu) moleküller arası mesafe artıyor $\mu \downarrow$ oluyor

Sıvılarda moleküllerarası mesafe çok ufak olduğundan viskozitenin asıl nedeni kohezyondur. Artan sıcaklıkla kohezyon azaldığından viskozite de azalır. Gazlarda viskozitenin asıl nedeni, molekül momentum transferidir. Artan sıcaklıkla moleküller daha enerjik hale geleceğinden ve momentum transferi artacağından, mutlak viskozite de artar. (molekül momentum transferinin olması için bir hız gradyanının olması lazım)

Molekül Yayı ve Sürekli Ortam Yaklaşımı:

(Havada her molekül 3 yönde hareket yapıyor, akışkan hareket etmiyor)

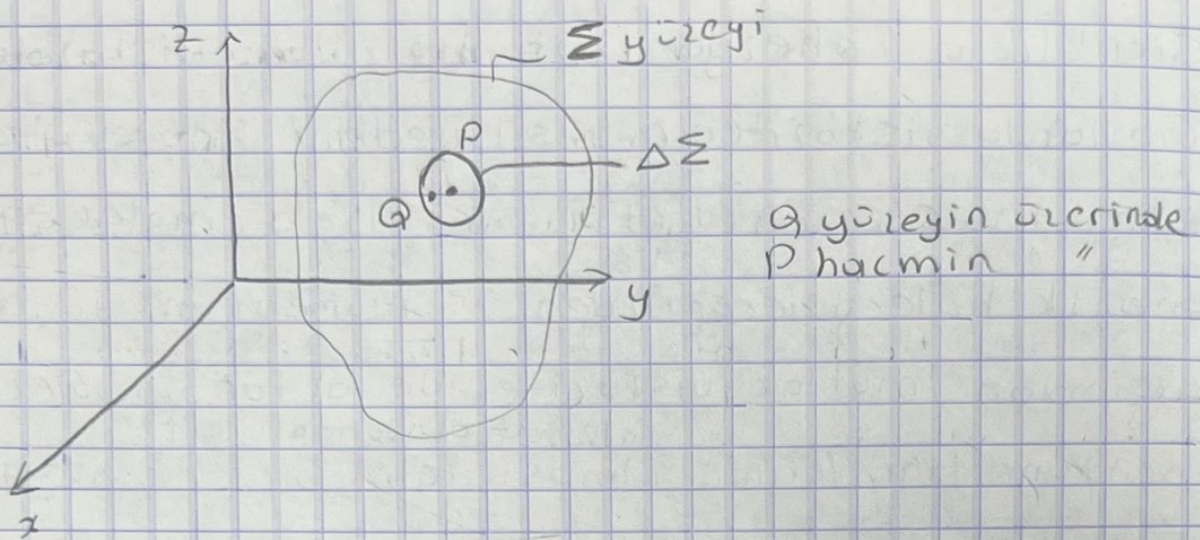


Azot için	$\sigma: 480 \text{ m/san.}$	} $T: 20^\circ \text{ de}$
$O_2 \rightarrow$	$\sigma: 430 \text{ m/san}$	
$Su \rightarrow$	$\sigma = 630 \text{ m/san}$	

Mikroskobik ölçüde bir noktadaki akışkan özellikleri (hız, sıcaklık gibi) rastgele olarak değişir.

Akışkanlar mekaniği moleküller arasındaki mesafeye göre çok büyük olan ~~ve~~ makroskobik ölçüde

akışkan özelliklerini bulmak ister ve sürekli ortam kavramını kullanır.



Σ yüzeyinde sınırlanmış bir akışkan düşünülür-
günde sürekli ortam kavramı bu akışkanın her-
hangi bir noktasındaki yoğunluğu ve akışkana etki-
yen iç ve dış kuvvetler hakkında bazı kabuller
yapar.

Yoğunluk: Σ cismi içindeki bir P noktasının içi-
ne alan $\Delta \Sigma$ yüzeyli ΔV hacmini düşünelim. ΔV 'nin
kütlesi Δm ise ortalama yoğunluk

$\rho_{ort} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ dir. $\Delta \Sigma$ yüzeyi içinde bir Q noktası

düşünüp Q ya P ye yaklaştıralım. Bu şekilde elde
edilen $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho_{ort} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho(x, y, z, t)$

limitine yoğunluk denir. Sürekli ortam yaklaşı-
mı bu limitin varlığını, tekliğini ve sıfır olmadı-
ğını kabul eder.

Serbest ortalama uzaklık (λ): Bir molekülün
diğer moleküllerle 2 çarpışması arasında aldığı
mesafedir.

Knudsen sayısı = $\frac{\lambda}{L}$ Serbest ortalama uzak-

lığın Problemin karakteristik uzunluğuna oranıdır.

(Boyutsuz bir sayı)

Sürekli ortam yaklaşımının geçerli olabilmesi için

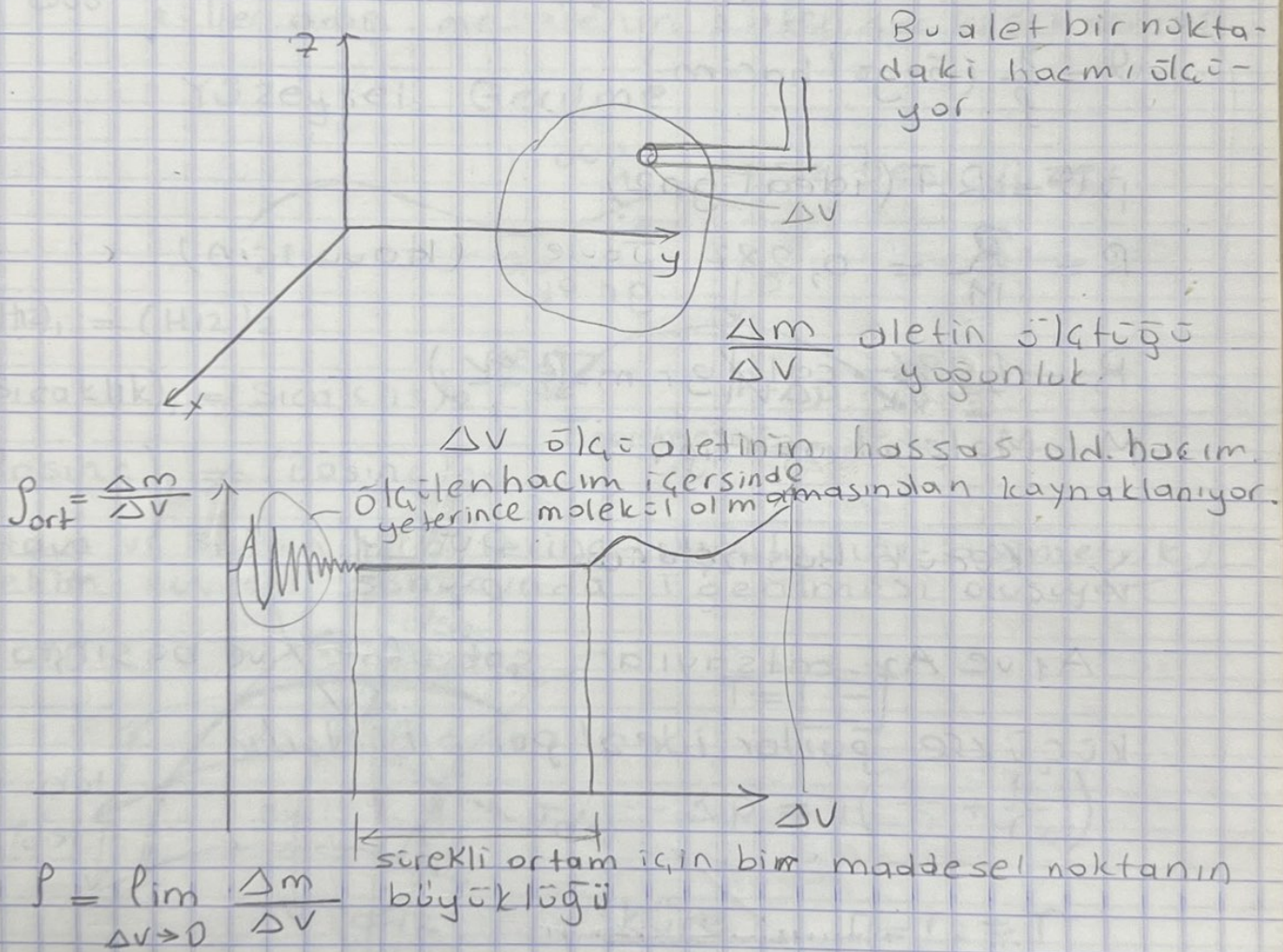
bu sayı 1 den çok ufak olmalıdır ($\ll 1$) = [Moleküller

birbirleri ile sık sık çarpışmalı] $Kn \ll 1$ ete aldığımız hacimde çok çok molekül olmalı)

$\lambda \approx 10^{-5}$ cm. (oda sıcaklığında hava için)

$L > 10^{-4}$ cm ise $Kn < 1$

Moddese1 Noktanın tanımı:



Ölçü aletinin ölçtüğü yoğunluğun yerel yoğunluk olması için duyarlı hacmin yeterince küçük fakat bu hacmin içinde çok sayıda molekül barındıracak kadar büyük olması gerekmektedir.

Çeşitli Sürekli ortamlar:

- 1- Rijit cisim (Mekanik)
- 2- Elastik cisim (Mukavemet)
- 3- Plastik cisim (Plastisite)
- 4) Akışkan (Akışkanlar Mekaniği)

$$P, \rho, T \Rightarrow \text{Hal denklemi} \quad \rho = \rho(P, T)$$

Sıvılarda hal denklemini analitik olarak vermek çok zor.

$$\text{Gazlar için} \quad \frac{Pv}{RT} = 1 + A_1 P + A_2 P^2 + \dots \quad (\text{Gerçek gaz})$$

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (\text{özgül hacim})$$

$$Pv = R.T \quad (\text{ideal gaz})$$

$$R = \frac{\bar{R}}{M} = 0,287 \frac{\text{Joule}}{\text{gr.}^\circ\text{K}} \quad (\text{Hava için})$$

$$\bar{R} = 1,986 \text{ cal/gr mole } ^\circ\text{K})$$

M: Molekül ağırlığı.

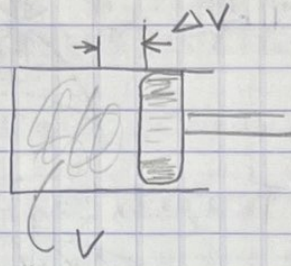
$$\rightarrow \text{Küçük basınçlarda} \quad \frac{Pv}{RT} = 1$$

A_1 ve A_2 katsayıları çok ufak / ve basınçta çok küçükse gazlar ideal gaz gibi davranır.

Sıvılarda Elastisite Modülü

$$K = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}$$

↳ elastisite modülü



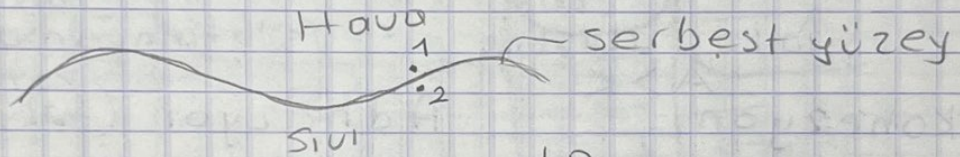
$$K > 0$$

20°C'teki su için $K = 21500 \text{ kg kuvvet/cm}^2$

$$\frac{\Delta V}{V} = 10^{-3} \Rightarrow \Delta p = 21,6 \text{ atm.}$$

Sıvı çok zor sıkışıyor ↓ böyle bir basınç, ortasında sadece $\frac{1}{1000}$ mertebesinde sıkışıyor. Bunun nedeni de moleküller arası mesafenin zaten çok küçük olması.

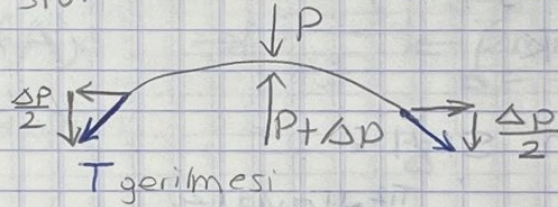
Yüzeysel Gerilme



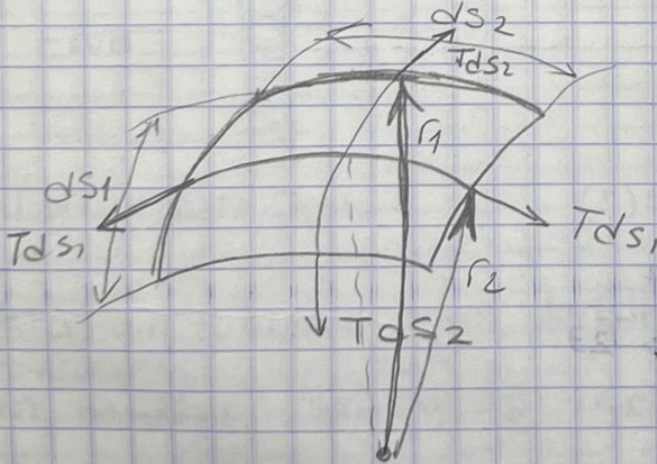
$$(Hiz)_1 = (Hiz)_2$$

$$(Sıcaklık)_1 = (Sıcaklık)_2$$

$$(Basınç)_1 \neq (Basınç)_2$$



Hava ve sıvının birbirlerine uyguladığı asimetric çekim kuvveti sonucunda T gerilmesi oluşuyor.

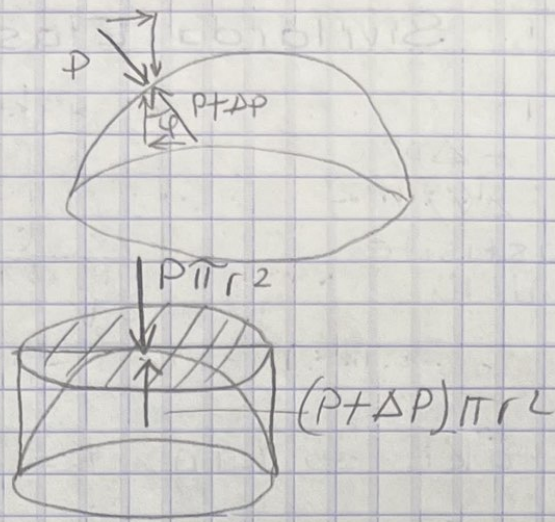
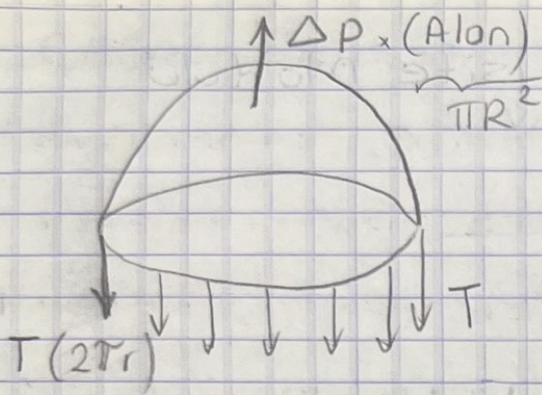


$$T = \left[\frac{F}{L} \right]$$

$$\Delta p = T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

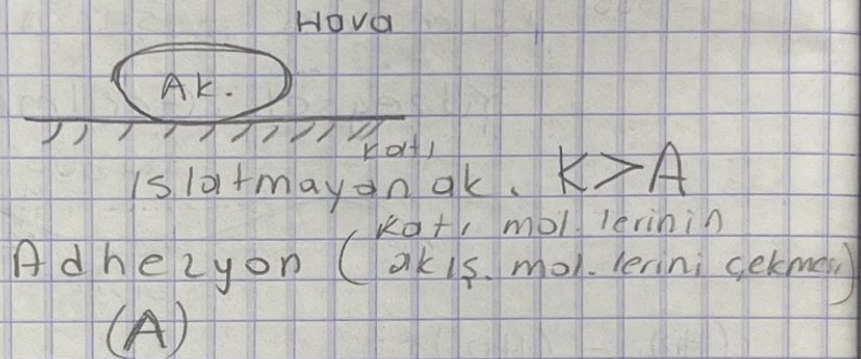
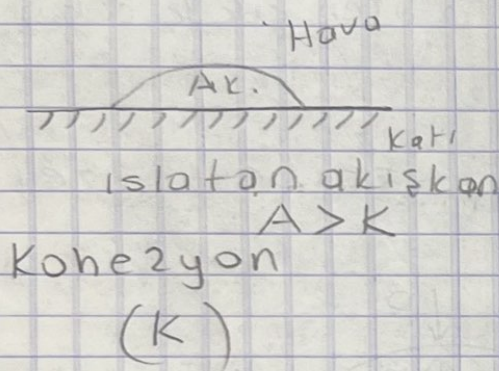
Küre: $r_1 = r_2 = r$

$$\Delta p = \frac{2T}{r}$$

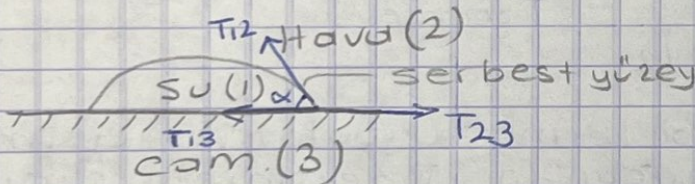


$$T \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \Delta p \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta p = \frac{2T}{r}}$$

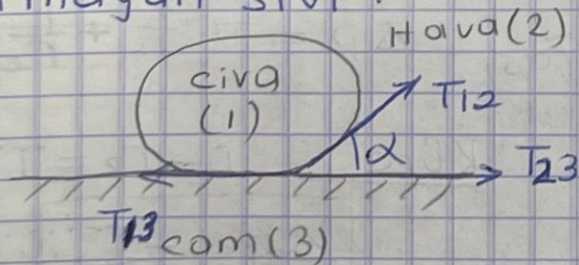


* Islatan sıvı :



$$T_{12} \cdot \cos \alpha + T_{13} = T_{23}$$

* Islatmayan sıvı :



$$T_{12} \cdot \cos \alpha + T_{23} = T_{13}$$

Su - hava

Cıva - hava

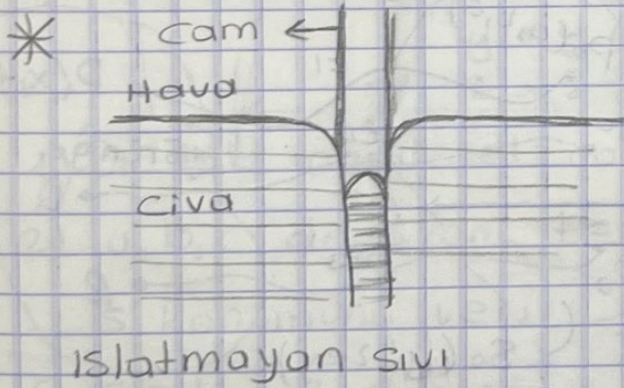
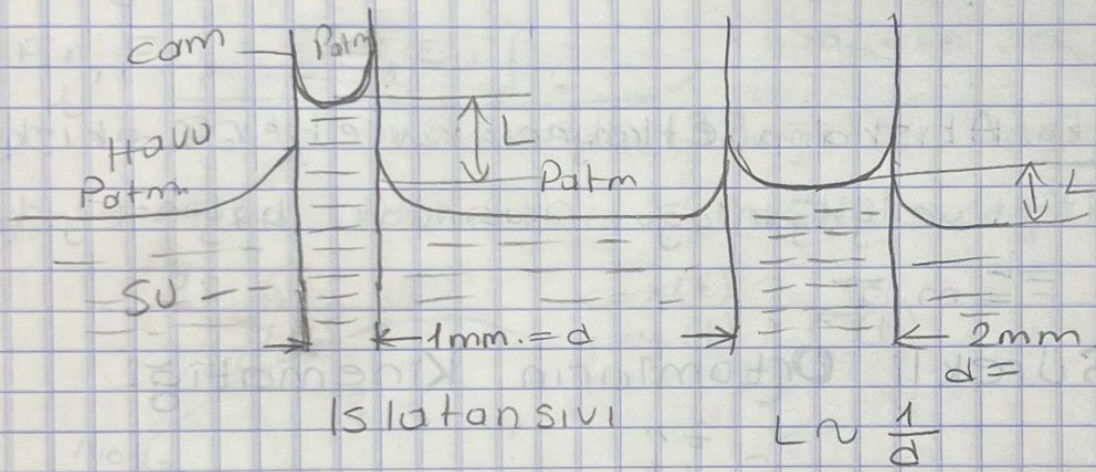
Alkol - hava

$\frac{T}{75 \text{ din/cm}}$

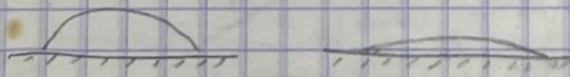
430 din/cm

25 " "

Yüzeysel gerilmenin nedeni akışkan molekülleri arasındaki çekim kuvvetlerinin (kohezyon) 2 ortamın birleşme yüzeyi çevresinde simetrik olma özelliğini kaybetmesi ve diğer ortamın çekim kuvvetleriyle etkileşmesidir. Islatan bir sıvı için, sıvı moleküllerinin katı cisme olan çekim kuvveti (adhezyon) kendi aralarındaki çekim kuvvetinden (kohezyon) büyüktür. Islatmayan sıvılar için durum tersidir.



Islatan sıvılar cam tüpte yukarı çıkar, ıslatmayan sıvılar ise aşağı iner. Bulaşık deterjanları suyun cam ile olan yüzey gerilimini düşürerek suyun ıslatma yeteneğini artırır.



Akışkanlar Mekaniği:

Statik
hidro → duran sıvıları inceleyen
Aero → duran gazları } Akışkanlar mek. dalı

Dinamik
hidro "
Aero "

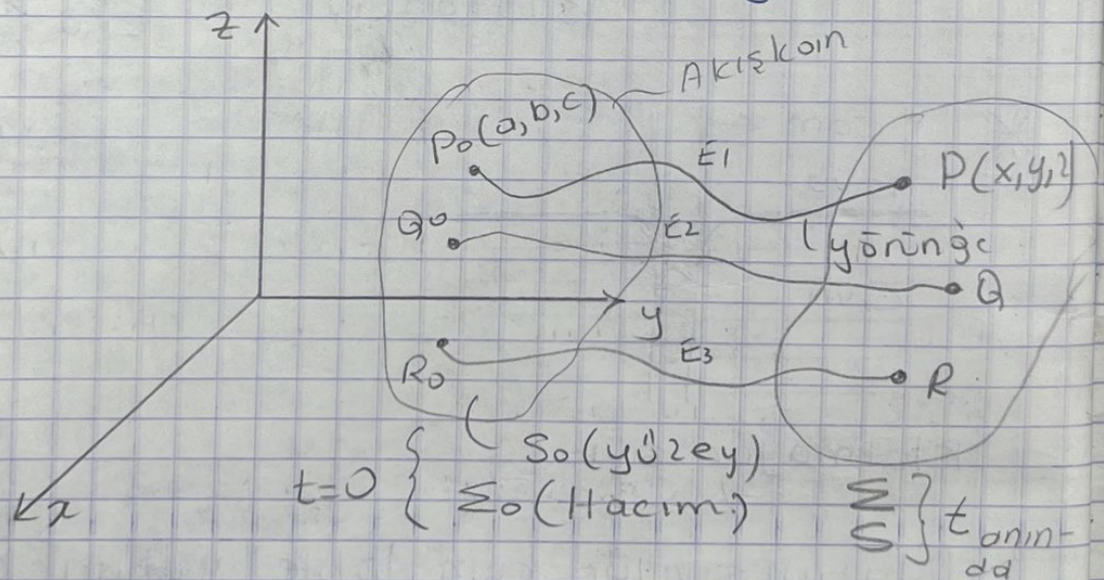
Dinamik
Kinematik Kinetik

* Kinematik: Hareketin nedenini araştırmadan yer, değiştirme, hız ve zaman arasındaki bağıntıları kurar.

* Kinetik: Akışkana etkiyen kuvvetlerle akışkan özellikleri ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı kurar.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

* Sürekli Ortamların Kinematığı.



hareket başlayınca mad. noktanın takip ettiği yola yörünge denir.

1) La grange yöntemi

2) Euler yöntemi

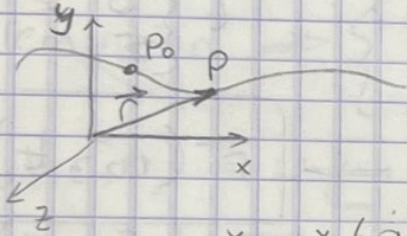
1) La grange yöntemi:

Hareketli sürekli ortamın $t_1 \leq t \leq t_2$ zaman aralığında yaptığı hareketle hareket boyunca sürekli ortamı izlemek ve ortamı meydana getiren maddesel noktaların, herbirinin çizmiş olduğu yörüngeleri kısaca yörüngeler ailesini göz önüne almaktır.

$\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ 1 bağımsız değ.

$a, b, c \rightarrow P_0$ 'in koordinatları (3 Bağımsız değişkenler)

$x, y, z \rightarrow P$ nin koordinatları (Bağımlı değişkenler)



$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \vec{r}(t)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} a, b, c \text{ sabit, } t \text{ değiş-} \\ \text{kense bir madde nokta-} \\ \text{nin hareketi incelen-} \\ \text{miş olur.} \end{array}$$

1) Bir tek maddesel noktanın hareketini verir

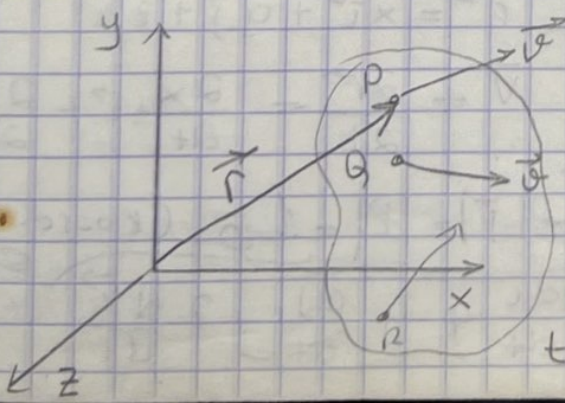
2) a, b, c değişken, $t = \text{sabit}$, ortamın t anındaki S konumunu verir.

3) a, b, c, t değişken yörüngeler ailesi elde edilir.

2) Euler Yöntemi

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{H1/2 } \vec{V}(\vec{r}, t) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$



$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

veriliyor

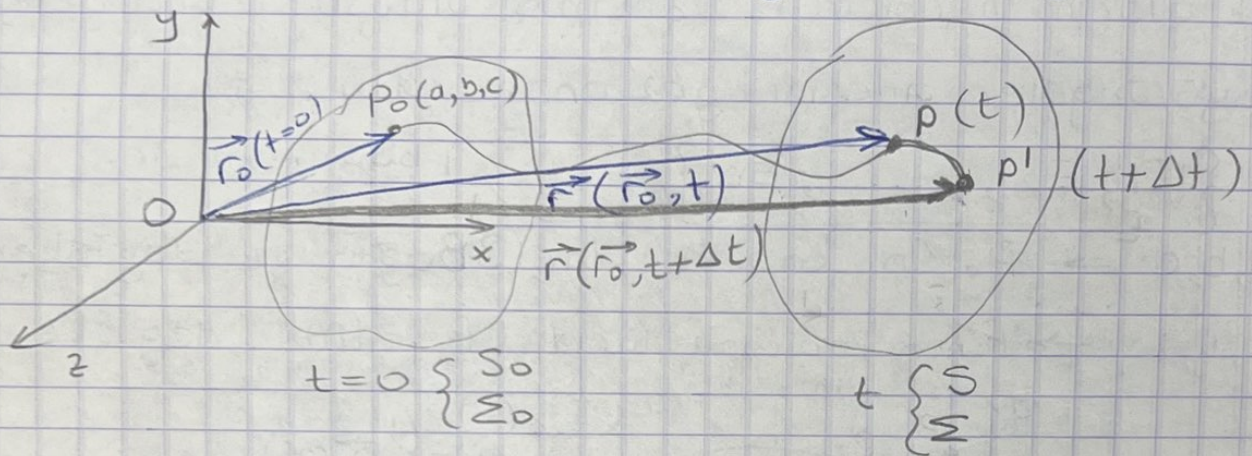
$t \in S$

Sürekli ortamın t anındaki konumunda, sürekli ortamı meydana getiren bütün maddesel noktaların bu andaki hızlarını, kısaca hızlar alanını göz önüne almaktır.

$x, y, z, t \rightarrow$ Bağımsız değişkenler.

$u, v, w \rightarrow$ Bağımlı değişkenler.

* Lagrange yönteminden Euler yöntemine geçiş.



$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \textcircled{1} \text{ verilmiş} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(\vec{r}_0, t)}$$

$$\vec{OP} + \vec{PP'} = \vec{OP'} \quad \vec{r}(\vec{r}_0, t) + \Delta \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t + \Delta t)$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}(\vec{r}_0, t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t + \Delta t) - \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Hücre alırken r_0 sabit tutuluyor. (Kısmi türev).

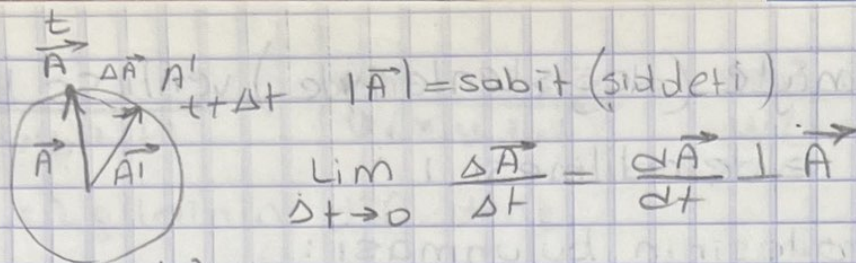
$$= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \vec{r}_0 = \text{sabit.}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t} \vec{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \quad (\text{koord. sistemi sabit, dönmüyor})$$

$$+ x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$$



$$x = x(a, b, c, t) \Rightarrow$$

$$U = \frac{\partial x}{\partial t} = U(a, b, c, t)$$

türevin fiziksel bir ölçülmesi için bir tek mat. noktayı göz önüne almak lazım yani a, b, c sabit tutuluyor ama türevi aldıktan sonra yine değişir.

$$U = \frac{\partial x}{\partial t} = U(a, b, c, t)$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = v(a, b, c, t)$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = w(a, b, c, t)$$

②

① denkleminde $\Rightarrow \begin{cases} a = a(x, y, z, t) \\ b = b(x, y, z, t) \\ c = c(x, y, z, t) \end{cases}$

$$U = U(a, b, c, t) = U[a(x, y, z, t), b(x, y, z, t), c(x, y, z, t), t]$$

$$U = U(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

Euler $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0 = \text{st.}}$

ivme: $\vec{\delta} = \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \right)_{\vec{r}_0 = \text{st.}}$

$$\delta x = \delta x(a, b, c, t)$$

$$\delta y = \delta y(a, b, c, t)$$

$$\delta z = \delta z(a, b, c, t)$$

① $\Rightarrow$

$$\delta x = \delta x(x, y, z, t)$$

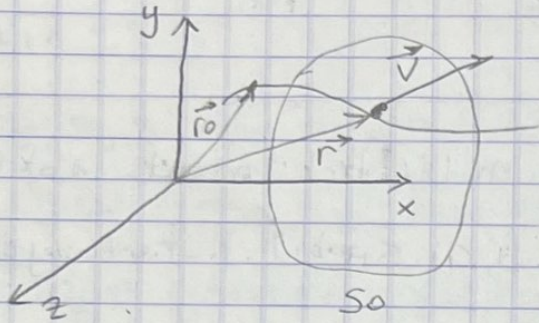
$$\delta y = \delta y(x, y, z, t)$$

$$\delta z = \delta z(x, y, z, t)$$

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}(\vec{r}, t)$$

* Euler yöntemiyle (değişkenleriyle) verilirse Lagrange değişkenlerinin elde edilmesi:

Yörüngeler ailesinin bulunması:



$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$U = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx}{dt} = U(x, y, z, t)$$

$$V = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dt} = V(x, y, z, t)$$

$$W = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dt} = W(x, y, z, t)$$

integre
edilirse

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$y = y(a, b, c, t)$$

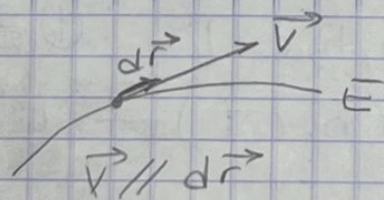
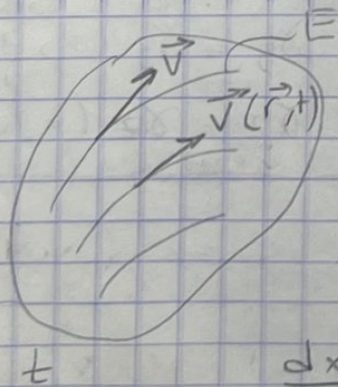
$$z = z(a, b, c, t)$$

$$\frac{dx}{U} = dt, \quad \frac{dy}{V} = dt, \quad \frac{dz}{W} = dt.$$

$$\frac{dx}{U(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V(x, y, z, t)} = \frac{dz}{W(x, y, z, t)} = dt.$$

Bu integrasyon yapılırken zaman (t) bir değişken.

Akım Çizgileri: Bir sürekli ortamın herhangi bir hareketinde bir t anındaki akım çizgileri bu andaki hız vektörüne teğet olan eğriler ailesidir.



$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\frac{dx}{U} = \frac{dy}{V} = \frac{dz}{W}$$

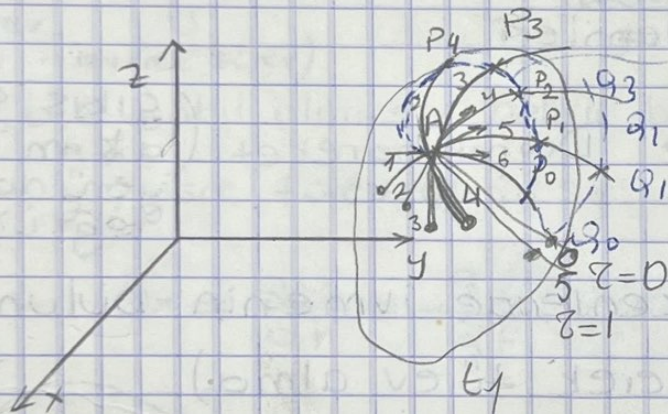
$$\vec{v} \parallel d\vec{r} \Rightarrow \vec{v} \wedge d\vec{r} = 0$$

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \xrightarrow{\text{integre edilir}} \text{ken} \rightarrow t = st. \text{ tutuluyor}$$

Akım çizgilerinin dif. denk.

Genel olarak Akım çizgileri her t anında başkadır ve yörüngeler ailesinden farklıdır. Hızlar alanının zamandan bağımsız old. daimi hareketler için Akım çizgileri ve yörüngeler birbirleri ile çakışır (Aynı eğerilerdir).

Çıkış çizgileri: Bir t_1 anında ve uzayın belirli bir A noktası için tanımlanırlar. Yörüngeleri A'dan geçen akışkan zerrelerinin t_1 anındaki geometrik yerine A noktasına ait t_1 anındaki çıkış çizgisi denir.



$t_1 = 6 \text{ sn.}$
Bu noktaların geometrik yeri

$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, A \rightarrow t_1 = 6 \text{ sn.}$

$Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, A \rightarrow t_1 = 8 \text{ sn.}$

Çıkış ~~den~~ çizgilerinin denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \textcircled{1} \Rightarrow \begin{aligned} a &= a(x, y, z, t) \\ b &= b(x, y, z, t) \\ c &= c(x, y, z, t) \end{aligned}$$

$t = \tau$ anında koordinatları x_A, y_A, z_A olan A noktasından geçen zerrelerin $t=0$ anın-

daki koordinatları şu şekilde verilir:

$$\left. \begin{aligned} a &= a(x_A, y_A, z_A, \zeta) \\ b &= b(x_A, y_A, z_A, \zeta) \\ c &= c(x_A, y_A, z_A, \zeta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 \leq \zeta \leq t_1 \\ &\downarrow \text{Değişken} \end{aligned}$$

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$x = x[a(x_A, y_A, z_A, \zeta), b(x_A, y_A, z_A, \zeta), c(x_A, y_A, z_A, \zeta), t]$$

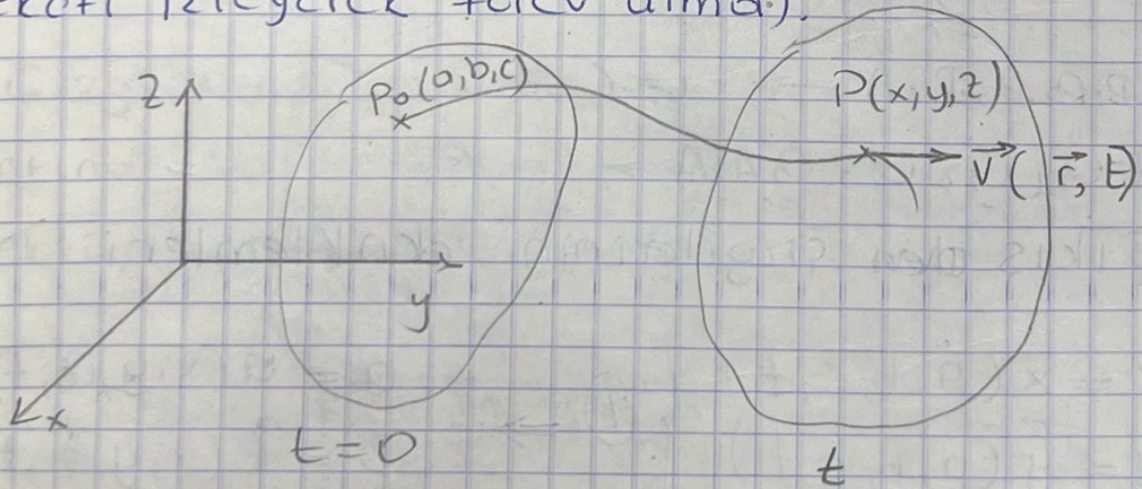
$$x_A, y_A, z_A = \text{sabit.}$$

$$t = t_1 = \text{sabit}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\zeta) \\ y &= y(\zeta) \\ z &= z(\zeta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 \leq \zeta \leq t_1 \\ &\text{Çıkış çizgilerinin parametrik denklemleri.} \end{aligned}$$

* $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$ ise Daimi hareket. (Çıkış çizgileri, akım çizgileri ve yönü ngeler aynı eğri).

* Euler değişkenlerde ivmenin bulunması (Hareketi izleyerek türev alma).



$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) \left\{ \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \right.$$

Bu operatör.

ρ, T

ca uygulanabilir

Bir P noktasındaki ivmeyi bulmak için o P noktasına yaklaşan maddesel noktanın hızının türevini alacağız. Hep aynı maddesel noktayı düşünmek; a, b, c 'yi sabit tutmakla mümkün olur.

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$y = y(a, b, c, t)$$

$$z = z(a, b, c, t)$$

$$\gamma_x = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_{a, b, c = \text{sabit}}$$

$$(2) U = U[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t]$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{a, b, c = \text{sabit}} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{a, b, c = \text{sabit}} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{a, b, c = \text{sabit}} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$\downarrow$
 Toplam türev
 (Hareketi izleyerek türev)

(2) de a, b, c sabit alınırsa belirli bir akışkan zerresi izlenir ve t 'ye göre türev alınırsa x -yönündeki ivme γ_x bulunur.

$$\gamma_x = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \neq \frac{\partial U}{\partial t}$$

(*) $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$ aynı şey yapılırsa

$$\gamma_y = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \neq \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

$$\gamma_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \neq \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} () = \frac{\partial}{\partial t} () + U \frac{\partial}{\partial x} () + \vartheta \frac{\partial}{\partial y} () + w \frac{\partial}{\partial z} ()$$

$$\frac{d}{dt} () = \frac{\partial}{\partial t} () + \vec{V} \cdot \nabla ()$$

Toplam değişim Zamanla değişim

Taşıyım ile değişim

$$\nabla() = \text{grad}() = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}() + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}() + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}()$$

Örn: $\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z}$

Dikkat: Bu hareketi ilaveyerek alınmış türev operatörü sadece $U(x,y,z,t)$, $\phi(x,y,z,t)$, $w()$, $\rho()$, $T()$ gibi bağımlı değişkenlere uygulanır.

x, y, z, t : Bağımsız değişkenler.

Eğer

$x = x(a, b, c, t)$ ise bu operatöre uygulanamaz.

$$\downarrow \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) + u \frac{\partial x}{\partial x} + v \frac{\partial x}{\partial y} + w \frac{\partial x}{\partial z}$$

$a, b, c = st$ $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2u} \text{ YANLIŞ.}$$

La grange değişkenlerinde bu uygulanamaz. Sadece bunlarda.

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dt}$$

Gradyon Operatörü (∇)

" " " uygulandığı büyüklüğün derecesini büyültür. Bir skalerin gradyanı vektör, vektörün gradyanı tensördür.

ϕ : skaler (1 sayı) (ρ, T, u, v, w)

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (\nabla \phi \rightarrow \text{Vektör (3 skaler)})$$

nabla

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$\vec{i}\vec{i} = \text{Diyodik}$
görpim.

$$\nabla(-) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}(-) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}(-) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}(-)$$

$$\nabla \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{i}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{i}\vec{k}$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{j}\vec{k}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{k}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k}\vec{k}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\nabla \vec{U}$ = Tansör (9 skaler)

Diverjans! $\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{skaler.}$

(Derecesi 1 azalıyor)

Laplasyen: $\nabla \cdot \nabla(-) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(-) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(-)$

a) $\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G$

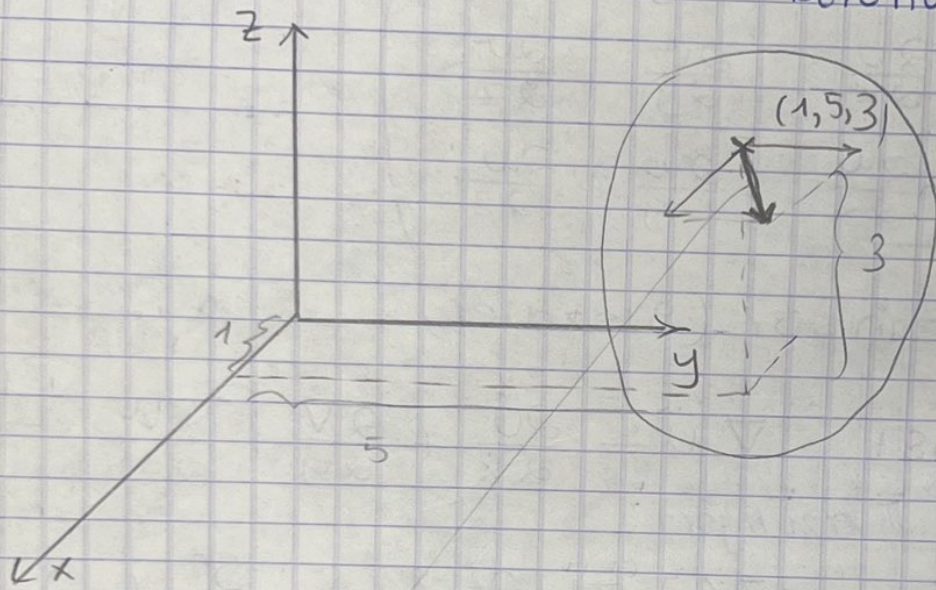
b) $\nabla(F \cdot G) = G \nabla F + F \nabla G$

c) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) = \text{div}(\underbrace{\nabla \wedge \vec{a}}_{\text{rot } \vec{a}}) = \text{div}(\text{rot } \vec{a}) = 0.$

d) $\nabla \wedge (\nabla \phi) = \text{rot}(\text{grad } \phi) = 0.$

Örnek : Bir akışkanın hareketi Euler değişkenlerinde
$$\left. \begin{aligned} U &= -\lambda y \\ V &= \lambda x \\ W &= 0 \end{aligned} \right\} \text{şeklinde veriliyor.}$$

- a) Hareketin Lagrange değişkenlerindeki ifadesini
 b) Yörüngeleri
 c) Akım çizgilerini
 d) $t_1 = \frac{\pi}{2\lambda}$ ve $A(1,0,0)$ 'a ait çıkış çizgilerini bulunuz.



λ : Bilinen sabit.

daimi hareket Hız zamana bağlı değil bütün t değerleri için böyle)

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\dot{x} = U = \frac{dx}{dt} = -\lambda y \Rightarrow \ddot{x} = -\lambda \dot{y} = -\lambda V$$

$$\ddot{x} = -\lambda(\lambda x) = -\lambda^2 x$$

$$\boxed{\ddot{x} + \lambda^2 x = 0} \text{ dif. denk}$$

Bu dif. denklemin çözümü () kabul edilirse

$$x = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t$$

$$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0 \rightarrow x = A e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}$$

$$v = \dot{y} = \lambda x \Rightarrow \ddot{y} = \lambda \dot{x} = \lambda v = \lambda(-\lambda y) = -\lambda^2 y.$$

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = 0 \Rightarrow y = C \cos \lambda t + D \sin \lambda t$$

$$v = -\lambda y = \dot{x}$$

$$-\lambda (C \cos \lambda t + D \sin \lambda t) = -A \lambda \sin \lambda t + B \lambda \cos \lambda t$$

$$\begin{cases} D = +A \\ C = -B \end{cases}$$

$$t=0 \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \end{cases} \quad \begin{cases} x=a=A=D \\ y=b=C=-B \end{cases}$$

$$x = a \cos \lambda t - b \sin \lambda t = x(a, b, c, t)$$

$$y = b \cos \lambda t + a \sin \lambda t = y(a, b, c, t)$$

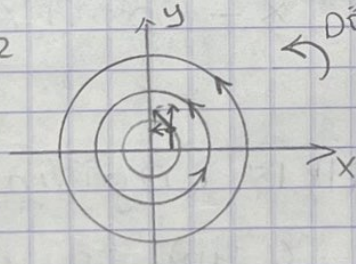
$$z = c = z(a, b, c, t)$$

→ yörüngelerin parametrik denklemleri

t yok edilecek

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$



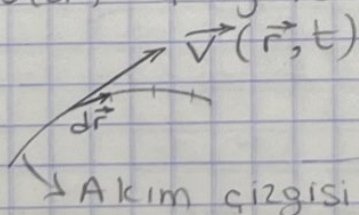
$$v = -\lambda y$$

$$v = \lambda x$$

$$(\lambda=1) \rightarrow \begin{cases} v = -y \\ v = x \end{cases}$$

$$A(1,1) \rightarrow v(-1,1)$$

Akım çizgileri hız vektörüne her an teğet olan çizgiler.



Akım çizgisi dr (çok ufak olduğu için $\parallel \vec{V}$)

$$d\vec{r} \parallel \vec{V} \text{ old.} \Rightarrow \frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \quad (t=st.)$$

$$\boxed{\frac{dx}{-\lambda y} = \frac{dy}{\lambda x} = \frac{dz}{0}} \quad (z=c)$$

$$\int \lambda x \cdot dx = -\int \lambda y \cdot dy \Rightarrow \lambda \cdot \frac{x^2}{2} = -\lambda \cdot \frac{y^2}{2} + St_1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = St_2} \rightarrow \text{Akım çizgilerinin denk.}$$

hızlar zamana
bağımlıdır.

$$d) \quad t_1 = \frac{\pi}{2\lambda} \quad A(1,0,0)$$

$$\textcircled{1} \text{ denkleminde } t = \tau, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Mad. noktaların başlangıçtaki konumları bulunur. $t = \tau$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= a \cdot \cos \lambda \tau - b \cdot \sin \lambda \tau \\ 0 &= b \cdot \cos \lambda \tau + a \cdot \sin \lambda \tau \\ 0 &= c \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= \cos \lambda \tau \\ b &= -\sin \lambda \tau \\ c &= 0 \end{aligned}$$

$t = \tau$ anında $(1,0,0)$ dan

geçen mad. noktaların başlangıçtaki konumları

$$\textcircled{1} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\lambda} \quad x = \cos \lambda \tau \cdot \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) + \sin \lambda \tau \cdot \sin \lambda \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)$$

$$\begin{cases} x = \sin \lambda \tau \\ y = \cos \lambda \tau \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Çıkış çizgisinin parametrik denk.}$$

τ yok ediliirse.

$$\boxed{x^2 + y^2 = St.}$$

Örnek:
$$\begin{cases} U = x^2 + x - y^2 \\ V = -y(2x+1) \\ W = 0 \end{cases}$$

Bu hareket için akım çizgilerini bulunuz.

$$\frac{dx}{U} = \frac{dy}{V} = \frac{dz}{W} \quad (t = \text{sabit})$$

$$W=0 \Rightarrow z = st = C \Rightarrow \boxed{z=C}$$

$$\frac{dx}{x^2+x-y^2} = \frac{dy}{-y(2x+1)} \Rightarrow \overbrace{y(2x+1)}^{\frac{\partial F}{\partial x}} dx + \overbrace{(x^2+x-y^2)}^{\frac{\partial F}{\partial y}} dy = 0 \quad (1)$$

$$F = F(x, y) \Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (2)$$

$$F = F(x, y) = \text{sabit} \text{ ise } \Rightarrow dF = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + x - y^2 \Rightarrow F = x^2 y + xy - \frac{y^3}{3} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y + \varphi'(x) = 2xy + y \Rightarrow \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \text{sabit}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = x^2 y + xy - \frac{y^3}{3} + \text{sabit}_1}$$

$$\boxed{x^2 y + xy - \frac{y^3}{3} = \text{sabit}_2}$$

Ödev 1)

Bir akışkanın hareketi Euler değişkenlerinde
$$\left. \begin{aligned} U &= y-t \\ \vartheta &= x-t \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \text{şeklinde verilmiştir.}$$

- Hareketi Lagrange değ. elde edin.
- $t=0$ anındaki akım çizgilerinin denklemini bul.
- " " ivmesi hızına dik olan akışkan parçacıklarının geometrik yerini bulun.
- $t=0$ anında $a=b=c=0$ noktasında bulunan akışkan taneciğinin yörüngesini bulun.

2) Bir akışkanın hareketi
$$\left\{ \begin{aligned} U &= \lambda(2\mu t^2 + y) \\ \vartheta &= 2\mu t \\ w &= 0 \end{aligned} \right.$$

 λ, μ sabitler.

- Hareketi Lagrange değişkenlerinde bulun.
 $t=0$ anında $a=b=c=0$ noktasında bulunan akışkan taneciğinin yörüngesini bulun.
- Herhangi bir andaki akım çizgilerinin denklemini ve özel olarak $t=0$ ve $t=1$ anlarındaki akım çizgilerinin denklemlerini bulun.
- $t_1 = \frac{1}{\lambda}$ $A\left(\frac{\mu}{\lambda^2}, -\frac{\mu}{\lambda^2}, 0\right)$ noktasına ait çıkış çizgisinin denklemini bulun.
- $t=0$ anında A noktasında bulunan akışkan taneciğinin t_1 anındaki hız ve ivmesini hesapla.

Sürekli Ortamın Özel Hareketleri :

1) Daimi Hareket

Hız alanı sadece konuma bağlı olup, zamana bağlı değilse hareket daimidir denir. Daimi harekette hız, basınç, yoğunluk ve sıcaklık zamanla değişmez.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

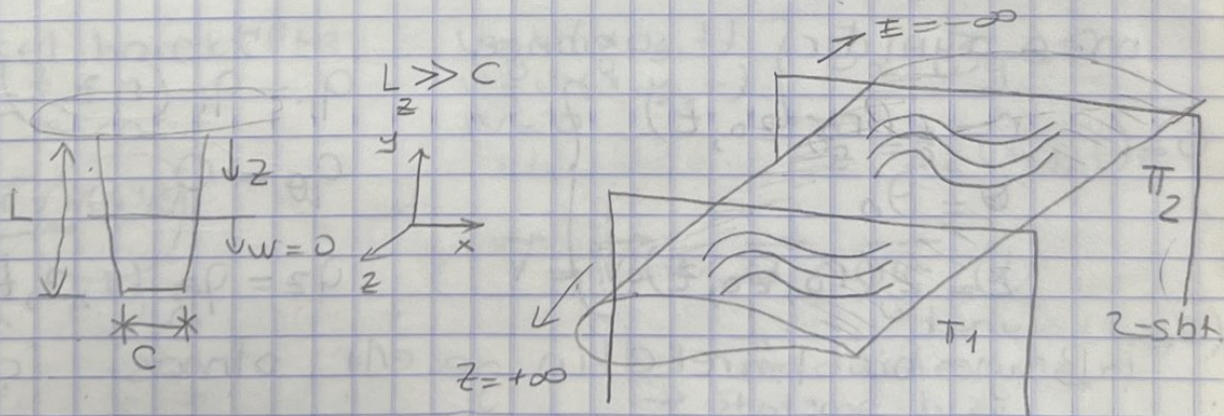
Akım çizgileri

$$\rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} \quad (t = \text{sabit})$$

Yörünge $\rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)} = dt \quad (t \text{ Değişken})$

Bir sürekli ortamın daimi hareketinde yörüngeler, akım çizgileri ve çıkış çizgileri üst üste gelirler. Bir akım çizgisi sonsuz sayıda yörüngenin üst üste gelmesinden meydana gelir. Bir çıkış çizgisi, bir akım çizgisinin bir parçasından oluşur.

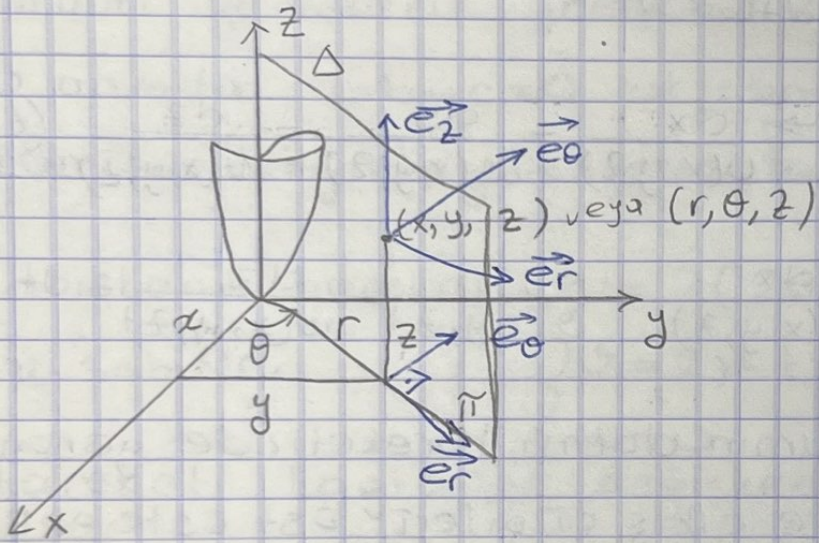
2) Düzlemsel Hareket (2 Boyutlu hareket)



Yörüngeler birbirine Paralel düzlemler içindedir. Bu düzlemlerden herhangi 2 tanesinde hareket kinematik olarak tamamen birbirinin aynıdır.

$$\left. \begin{array}{l} x = x(a, b, t) \\ y = y(a, b, t) \\ z = c \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} u = u(x, y, t) \\ \vartheta = \vartheta(x, y, t) \\ w = 0 \end{array} \right\}$$

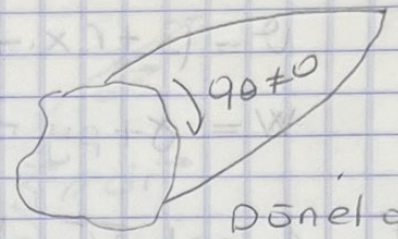
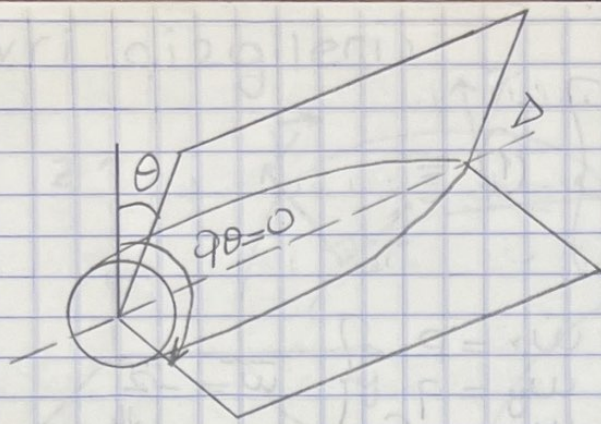
3) Dönel Hareket (Eksenel Simetrik Har.)



Dönel hareketle yörüngeler aynı bir Δ doğrusundan geçen yarı düzlemler içindedir. Bu düzlemlerden herhangi ikisindeki hareket birbirinin tamamen aynıdır. Lagrange

$$\left. \begin{array}{l} r = r(r_0, z_0, t) \\ \theta = \theta_0 \\ z = z(r_0, z_0, t) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{q}_r = \dot{q}_r(r, z, t) \\ \dot{q}_\theta = 0 \\ \dot{q}_z = \dot{q}_z(r, z, t) \end{array} \right\} \text{Euler}$$

Böyle bir hareketin geçerli olması için cismin eksenel simetrik olması lazım



Dönöl olmayan

Dönel hareket.

Çevri (Girdap) Vektör alanı:

Hız vektörünün rotasyoneline (yarisına) çeviri vektörü denir.

$$\text{çevri} \leftarrow \vec{\zeta} = \text{rot } \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V} \quad \vec{\zeta} \perp \vec{V}$$

$$\text{girdap} \leftarrow \vec{W} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V}$$

$$\vec{\zeta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \zeta_x \vec{i} + \zeta_y \vec{j} + \zeta_z \vec{k}$$

$$\zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \zeta_x(x, y, z, t)$$

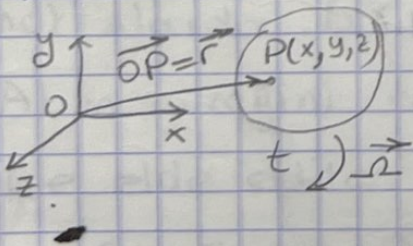
$$\zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \zeta_y(x, y, z, t)$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta_z(x, y, z, t)$$

Düzlemsel harekette

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y, t) \\ v = v(x, y, t) \\ w = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \zeta_x = \zeta_y = 0 \\ \zeta_z = \zeta_z(x, y, t) \neq 0 \end{array}$$

* Katı Cisim



$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \quad (1)$$

konum (x, y, z)
 anidönme (p, q, r)
 öteleme hızı (α, β, γ)

$$\begin{cases} \textcircled{1} \Rightarrow \begin{aligned} u &= \alpha + qz - yr \\ v &= \beta + rx - zp \\ w &= \gamma + py - xq \end{aligned} \end{cases} \textcircled{1}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \xRightarrow{\textcircled{1}} \begin{cases} \omega_x = p \\ \omega_y = q \\ \omega_z = r \end{cases} \quad \vec{\omega} = -\vec{z} \quad \downarrow \quad \vec{z} = -\vec{z}(t) \quad \text{kati cisim}$$

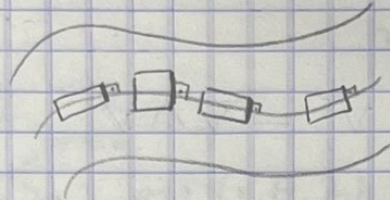
akışkanda $\vec{\omega} = \vec{\omega}(r, t)$



$$\vec{\omega} \neq 0$$

gevriili hareket.

öteleme + Donme



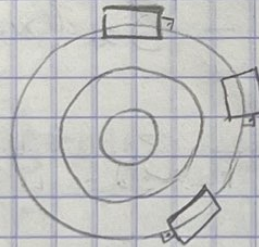
$$\vec{\omega} = 0$$

Gevririz hareket

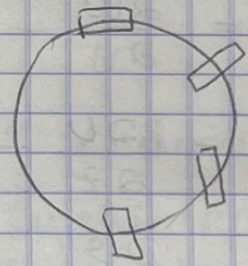
öteleme.



gevriili veya gevrisiz olabilir



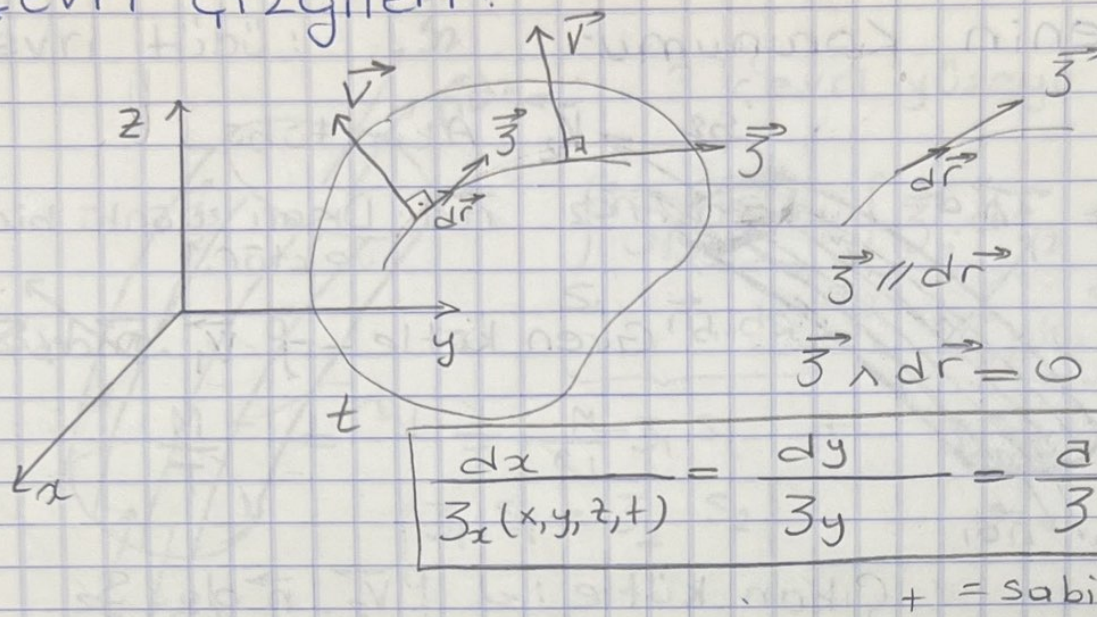
$$\vec{\omega} = 0$$



$$\vec{\omega} \neq 0$$

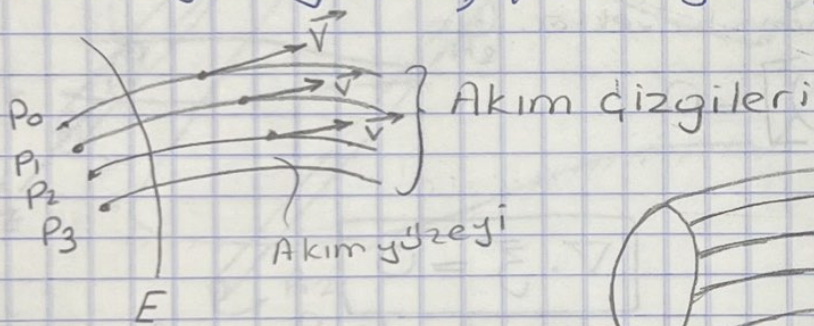
Sürtünmesiz bir akışkanda geviri sıfır. Ancak sürtünmeli bir akışkan gevri yaratabilir.

Çevri çizgileri:

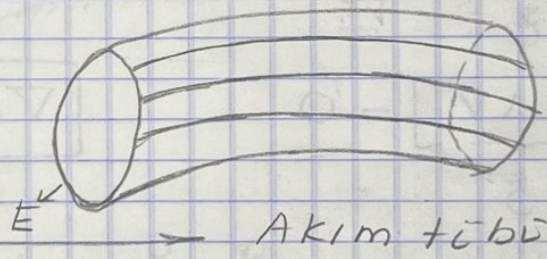


Bir t anındaki çevri vektörlerine teğet olan eğri-
lere o anındaki çevri çizgileri denir.

Akim yüzeyleri, çevri yüzeyleri:



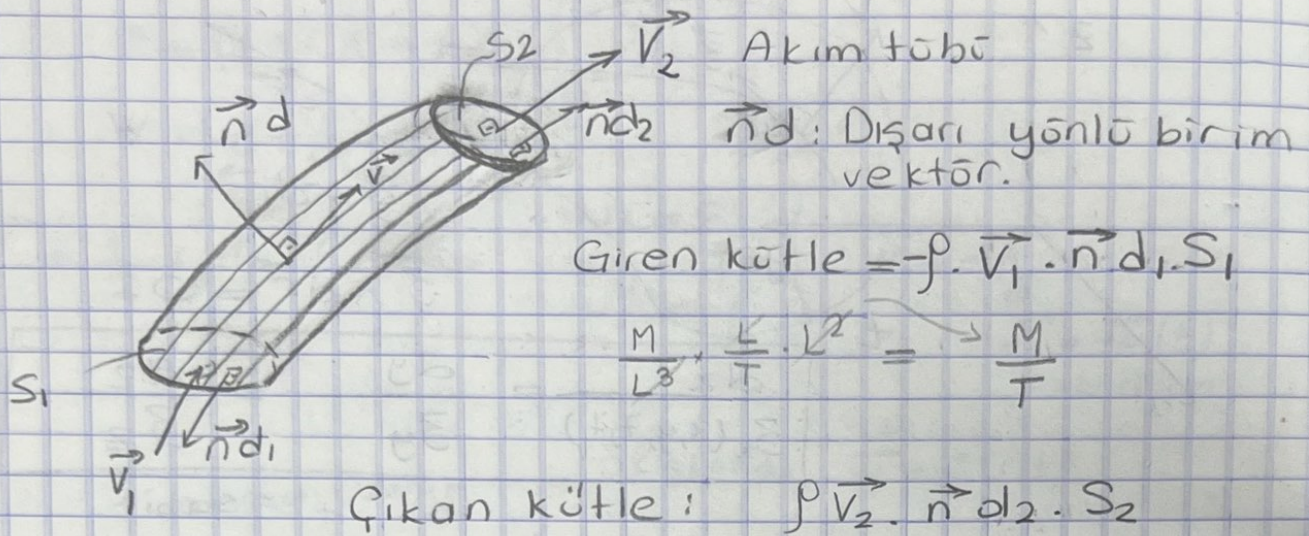
E kapalı ise



Bir sürekli ortam hareketinde bir t anında kendisi
akım çizgisi olmayan bir E eğrisini kesen bütün akım
çizgilerinin mey. getirdiği yüzey akım yüzeyi adını
alır. Bu tanıma göre böyle bir yüzey üzerindeki
noktalarda bir t anındaki hızlar bu yüzeye teğettir.
Akım yüzeyini tanımlayan E eğrisi, kapalı bir eğri
ise elde edilen yüzeye akım tübü denir.

Çevri yüzeyi ve çevri tübü benzer şekilde ta-
nımlanır.

* Kütlenin Korunumu:



$$\boxed{\rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2} \text{ (Daimi hareket)}$$

* Çevrinin Uzaysal Korunumu

herhangi bir vektör.

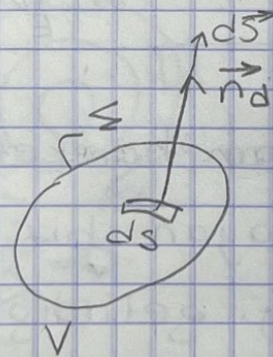
$$\text{div} [\text{rot}(\text{vektör})] = 0$$

$$\text{div} [\underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{\vec{z}}] = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{z} = 0}$$

$$\text{hacim} \int_V (\nabla \cdot \vec{z}) dV = 0$$

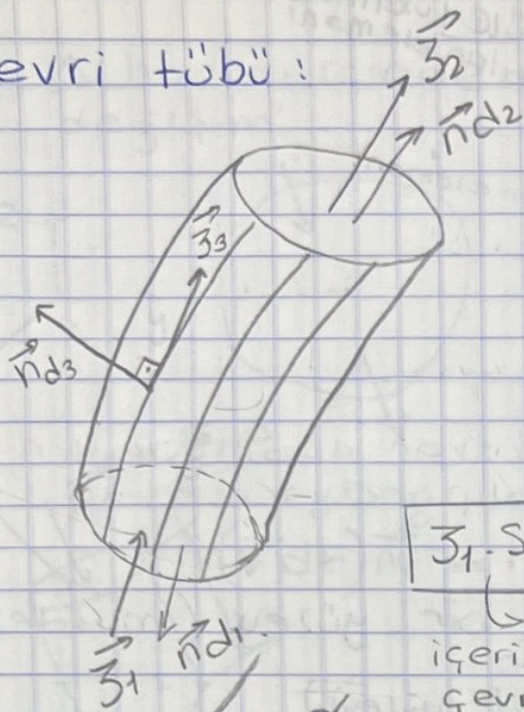
Green formülü



$$\int_V \text{div} \vec{\sigma} dV = \int_S \underbrace{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}_d}_{\frac{d\vec{S}}{dS}} dS \quad \vec{\sigma} = \vec{z}$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{z}) dV = \int_S \vec{z} \cdot \vec{n}_d dS = \int_S \vec{z} \cdot d\vec{S} = 0$$

Çevri tübü:



3 çevri yüzeyi

$$\int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{v}_3 \cdot d\vec{S}_3 = 0$$

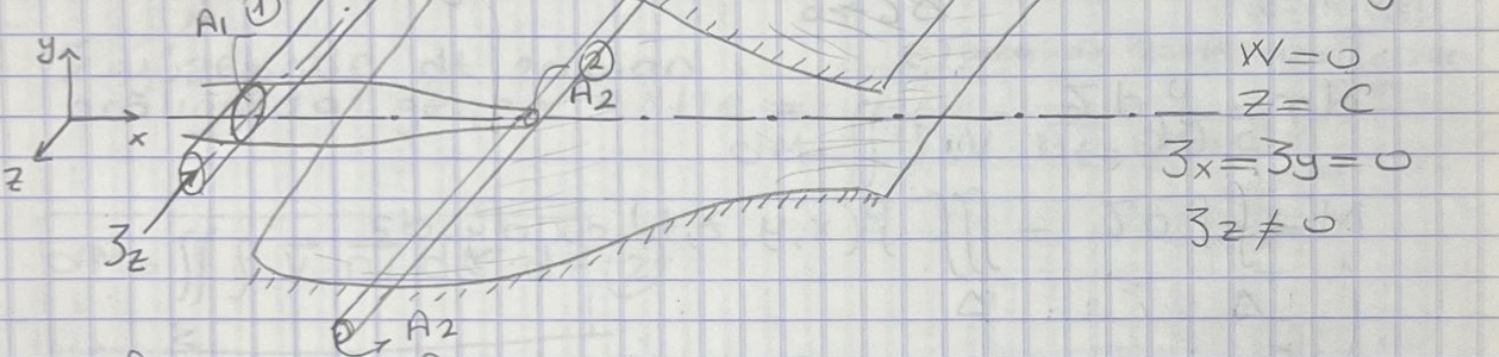
$$\underbrace{\int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{-v_1 \cdot S_1} + \underbrace{\int_{S_2} \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{v_2 \cdot S_2} = 0$$

$$-v_1 \cdot S_1 + v_2 \cdot S_2 = 0$$

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

içeri giren = dışarı çıkan
çevri

*



iki boyutlu

$$W=0$$

$$z=C$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$v_z \neq 0$$

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$

sıkıştırılamaz akışkan ise $\rho_1 = \rho_2$

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

$$v_2 \neq v_2(z)$$

→ çevrinin miktarı değişmiyor.

$$v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot A_1$$

$$A_2 < A_1 \rightarrow v_2 > v_1$$

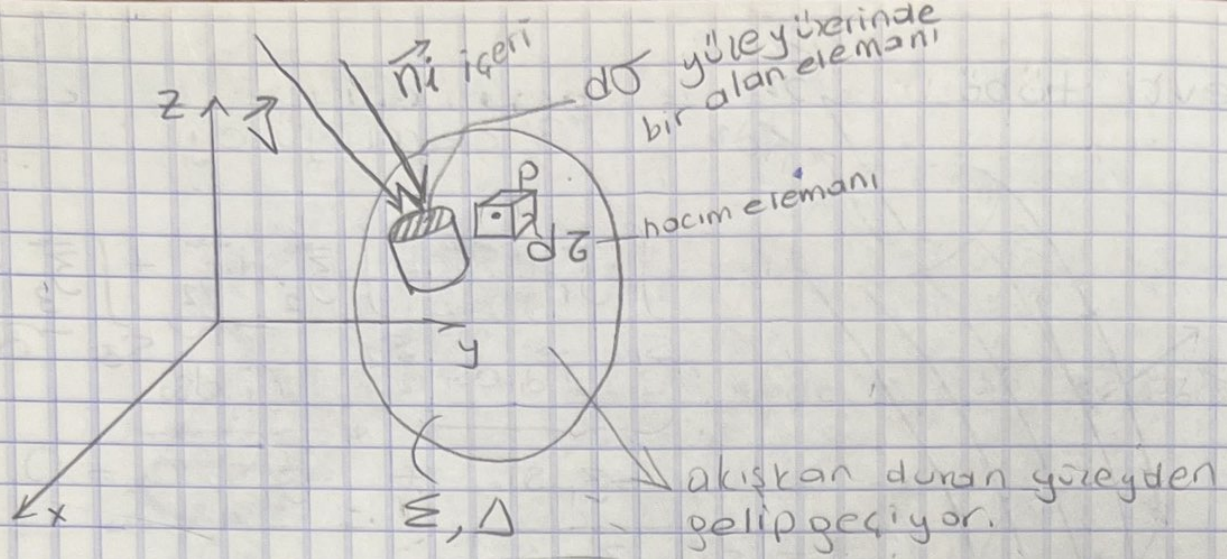
* Süreklilik denklemi:

Kütlenin korunumu prensibinin sonucu olarak yoğunluk ve hız alanları birbirine şu denklemle bağlıdır.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

(A)

Süreklilik denkleminin
Aifer. Şekli



Σ akışkan içinde herhangi bir yüzey (maddesel olmayan ve duran bir kontrol yüzeyi)

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

$$dm = \rho \cdot d\tau$$

$$M = \int_{\Delta} \rho \cdot d\tau = \iiint_{\Delta} \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

⊕ anındaki Δ hacmi içindeki kütle.

$t + dt$ " " " kütle

$$\rightarrow M + dM = \int_{\Delta} \rho(x, y, z, t + dt) d\tau$$

$$dM = \int_{\Delta} \rho(x, y, z, t + dt) d\tau - \int_{\Delta} \rho(x, y, z, t) d\tau$$

$$dM = \int_{\Delta} [\rho(x, y, z, t + dt) - \rho(x, y, z, t)] d\tau$$

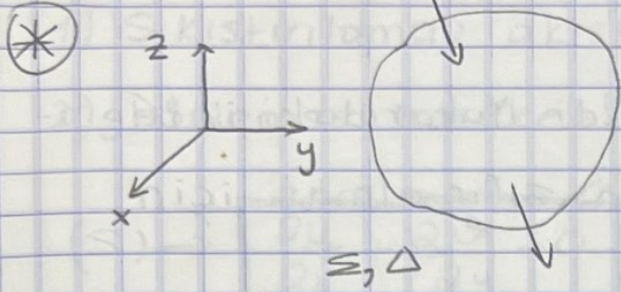
$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{x, y, z = \text{sabit}} dt$$

$$dM = \int_{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau$$

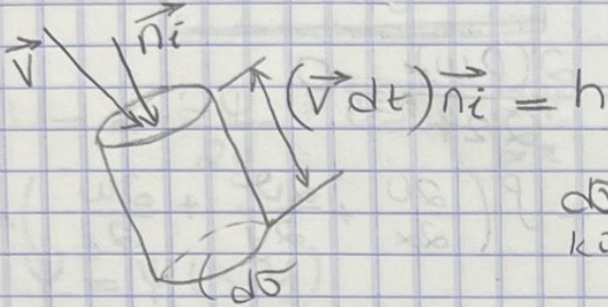
$$dM = dt \int_{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\tau \quad (1)$$

① Δ hacmi içinde dt zaman aralığındaki kütle değişimi:

2-4-1986



$$\text{kütle} = (\text{Alan}) \times h \times \rho$$



$d\sigma$ dan dt zamanında içeri giren kütle

$$= \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}_i) dt \cdot d\sigma$$

aynı yönde (+) işaretli $\rightarrow$ kütle içeri girer.
(-) olursa kütle dışarı çıkar.

Σ yüzeyinde dt zaman aralığında geçen kütle

$$dM = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_i \cdot d\sigma \cdot dt$$

$$dM = \iiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_i \cdot d\sigma \cdot dt \quad (2)$$

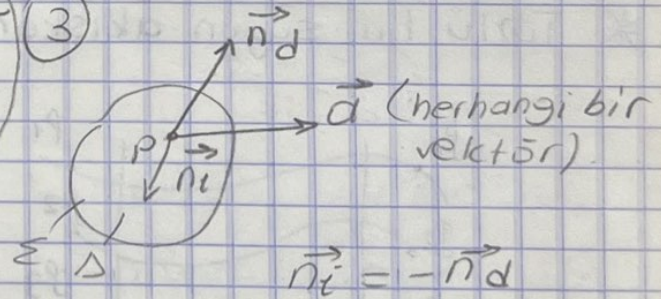
Kütlenin korunuma göre ① = ②

$$dM = dt \int_{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = dt \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_i d\sigma$$

$$\int_{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_i \cdot d\sigma \quad (3)$$

Green formülü kullanarak

$$\int_{\Delta} \text{div } \vec{a} d\tau = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_d d\sigma$$



$$\vec{n}_i = -\vec{n}_d$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \int_{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_d d\sigma = - \int_{\Delta} \text{div}(\rho \vec{v}) d\tau$$

$$\int_{\Delta} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Δ herhangi bir bölge olarak seçildi. Yukarıdaki integralin bölge sınırları ne olursa olsun sıfır olması için, integralin içi sıfır olmalıdır.

$$(A) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0} \quad (B)$$

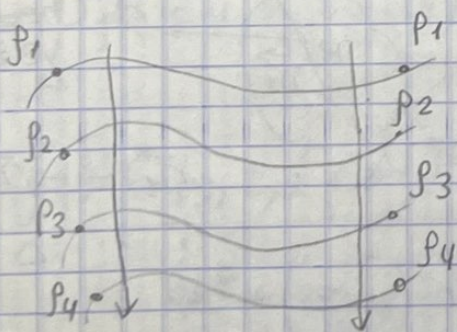
* Sıkıştırılamaz akışkan $\rightarrow \rho = \text{sabit} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0$

$$(B) \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{v} = 0}$$

* Daimi hareket $\rho = \rho(x, y, z) \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$(A) \Rightarrow \boxed{\text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

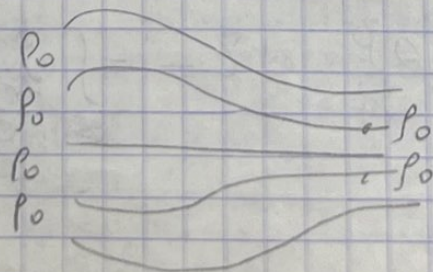
* Tuzlu bir suyun akışkan sıkıştırılamaz akışkan (tuzlusu)



$$\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$$

Gerekli hareketin başladığı yerde yoğunluk farkı yoktur

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$



Akim Fonksiyonu (Ψ)

Kabuller:

- 1) Sıkıştırılamaz akışkan $\rightarrow \text{div } \vec{V} = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$
- 2) Düzlemsel hareket $\rightarrow w = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$(S) \rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = +\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Rightarrow (S) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$$

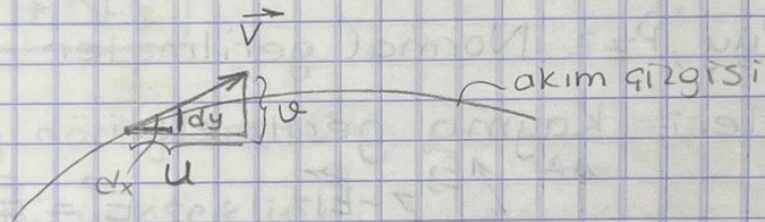
$$\Psi = \Psi(x, y)$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

$$\Psi = \text{st.} \Rightarrow d\Psi = 0 = v dx - u dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{v}{u}$$

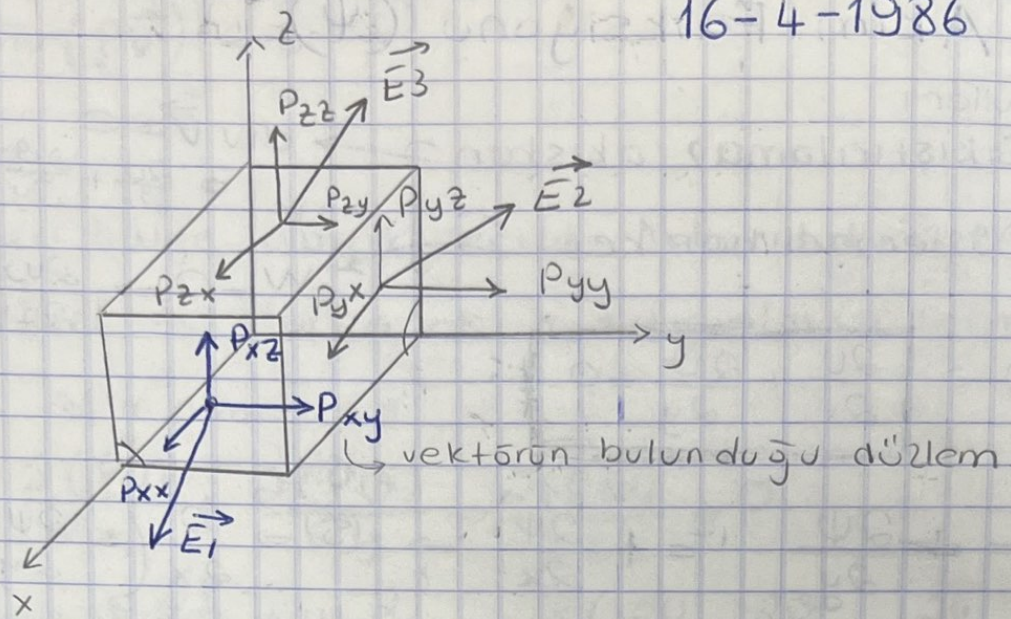
$\Psi = \text{st.}$



Ψ nin sabit olduğu eğriler hız vektörüne teğet olan eğrilerdir. Bu yüzden Ψ nin adı akım fonk. dur.

Eksik

16-4-1986



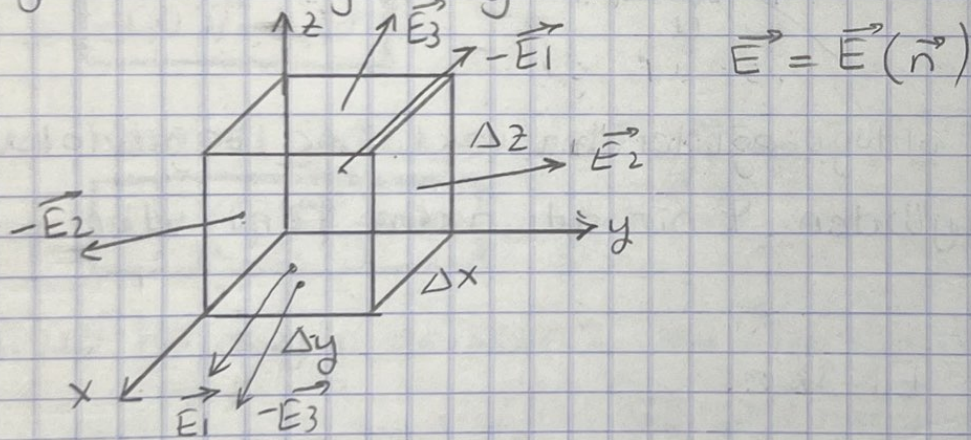
$$\vec{E}_3 = P_{zx} \vec{i} + P_{zy} \vec{j} + P_{zz} \vec{k}$$

$$\vec{E}_2 = P_{yx} \vec{i} + P_{yy} \vec{j} + P_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{E}_1 = P_{xx} \vec{i} + P_{xy} \vec{j} + P_{xz} \vec{k}$$

P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} Normal gerilmeler

Diğerleri Kayma gerilmeleri

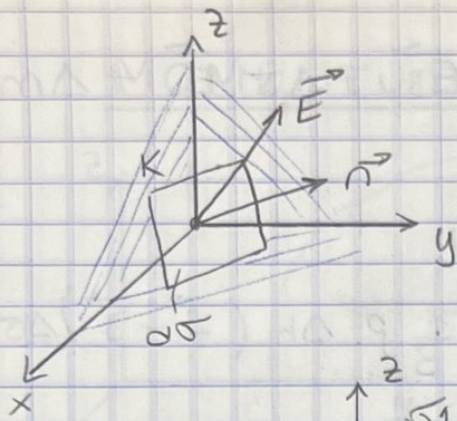


$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{n})$$

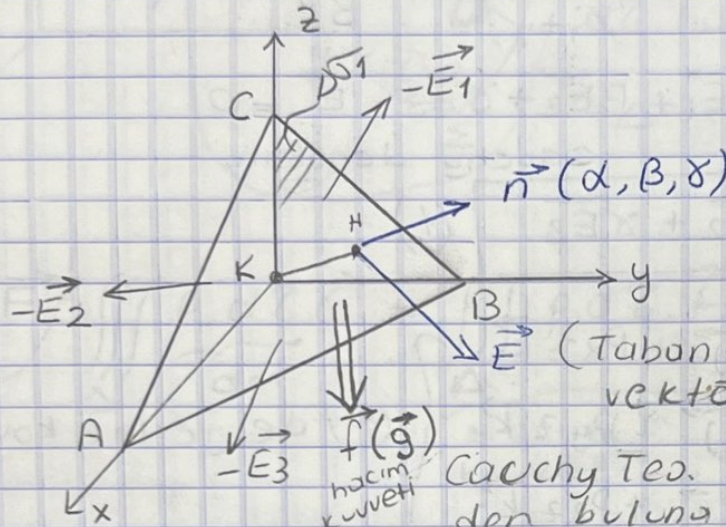
Cauchy Teoremi:

Bir K noktasından geçen $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ gibi birbirinden farklı yönlü 3 elemansel alan için

$\vec{E}_1, \vec{E}_2$ ve $\vec{E}_3$ gerilme vektörünü bilirsek aynı noktadan geçen herhangi bir $d\sigma$ alanı için $\vec{E}$ gerilme vektörü bulunabilir.



$$\vec{E} = E(\vec{n})$$



K dan yüzeye dik H

$\vec{E}$ (Taban alanındaki gerilme vektörü)

Cauchy Teo. $\vec{E}$ yi $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ cinsinden buluna bileceğini söylüyor. yerkeminden veya manyetik alandan dolayı oluşan kuvvet.

$$\vec{E} = \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + \gamma \vec{E}_3$$

KABC : Cauchy dört yüzlüsü

KH : Dört yüzlü yüksekliği

$\Delta\sigma$: " taban alanı

$$K_{\widehat{BC}} : \Delta\sigma_1 = \alpha \Delta\sigma$$

α, β, γ : Kosinüs doğrultuları

$$K_{\widehat{AC}} : \Delta\sigma_2 = \beta \Delta\sigma$$

$$K_{\widehat{AB}} : \Delta\sigma_3 = \gamma \Delta\sigma$$

$\Delta\tau$: Dört yüzlü hacmi

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} \Delta h \cdot \Delta\sigma$$

$$\Delta m = \frac{1}{3} \rho \cdot \Delta h \cdot \Delta\sigma$$

Newton'un II yasası $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ uygulanarak

$$-\Delta\sigma_1 \vec{E}_1 - \Delta\sigma_2 \cdot \vec{E}_2 - \Delta\sigma_3 \cdot \vec{E}_3 + \Delta\sigma \cdot \vec{E} + \Delta m \cdot \vec{f} = \Delta m \cdot \vec{\gamma}$$

$\vec{f}$ kuvvet
kütlesi

$$(\alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + \gamma \vec{E}_3 - \vec{E}) \Delta\sigma = \frac{1}{3} \rho \cdot \Delta h (\vec{f} - \vec{\gamma}) \Delta\sigma$$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Rightarrow H \rightarrow K \quad \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + \gamma \vec{E}_3 - \vec{E} = 0$$

Cauchy denklemi

$$\boxed{\vec{E} = \alpha \vec{E}_1 + \beta \vec{E}_2 + \gamma \vec{E}_3} \quad (1)$$

$$\vec{E}_1 = P_{xx} \vec{i} + P_{xy} \vec{j} + P_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{E}_2 = P_{yx} \vec{i} + P_{yy} \vec{j} + P_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{E}_3 = P_{zx} \vec{i} + P_{zy} \vec{j} + P_{zz} \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

(1) de yerine koyulursa

$$E_x = \alpha P_{xx} + \beta P_{yx} + \gamma P_{zx}$$

$$E_y = \alpha P_{xy} + \beta P_{yy} + \gamma P_{zy}$$

$$E_z = \alpha P_{xz} + \beta P_{yz} + \gamma P_{zz}$$

$$\begin{bmatrix} E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{n} \cdot \bar{\bar{P}}}$$

$\bar{\bar{P}}$ gerilme tensörü
 $\vec{E}$ " vektörü

$\bar{\bar{P}}$ simetrik

$$P_{xy} = P_{yx}$$

$$P_{xz} = P_{zx}$$

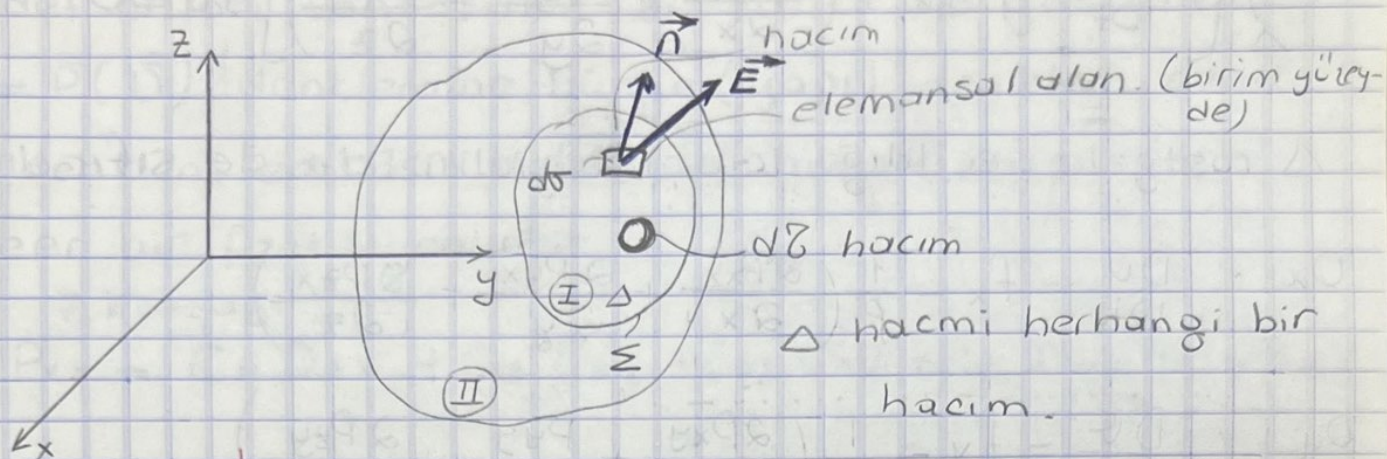
$$P_{yz} = P_{zy}$$

$$\vec{E} = \vec{n} \cdot \bar{\bar{P}}$$

$$\vec{E} = \bar{\bar{P}} \cdot \vec{n}$$

$\bar{\bar{P}}$ sim. olması idi
yer değiştiremedi.

MOMENTUM DENKLEMİ



otalet vektörü $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\iiint_{\Delta} \rho \cdot dV \cdot \vec{a} = \iiint_{\Delta} \rho \cdot dV \cdot \vec{f} + \iint_{\Sigma} (-\vec{E}) \cdot d\vec{\sigma}$$

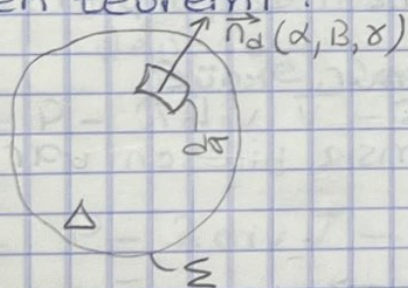
Hacim kuvveti

$\vec{E}$: I den II ye etki ediyor
Bizim bulmak istediğimiz bunun tersi, yani $\text{II} \rightarrow \text{I}$ c

$$\int_{\Delta} \rho \cdot \vec{a} \cdot dV = \int_{\Delta} \rho \cdot \vec{f} \cdot dV - \int_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{P} \cdot d\sigma$$

$$O_x : \int_{\Delta} \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} \cdot dV = \int_{\Delta} \rho \cdot f_x \cdot dV - \int_{\Sigma} (\alpha P_{xx} + \beta P_{yx} + \gamma P_{zx}) \cdot d\sigma$$

Green teoremi :



$\vec{a}$ vektör. $\Rightarrow \vec{P}$ (Tansör)

$$\int_{\Sigma} \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{n}_d}_{\text{skaler}} \cdot d\sigma = \int_{\Delta} \underbrace{\text{div } \vec{a}}_{\text{skaler}} \cdot dV$$

$$\int_{\Sigma} \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{n}_d}_{\vec{E}(\text{vektör})} \cdot d\sigma = \int_{\Delta} \underbrace{\text{div } \vec{P}}_{\text{vektör}} \cdot dV$$

$$\int_{\Sigma} (\alpha P_{xx} + \beta P_{yx} + \gamma P_{zx}) \cdot d\sigma = \int_{\Delta} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) \cdot dV$$

$$\int_{\Delta} \left[\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho \cdot f_x + \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) \right] dV = 0$$

Δ rastgele seçildiği için integralin içi de sıfır olmalı

$$0_x : \frac{Dv}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$0_y : \frac{Dv}{Dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$0_z : \frac{Dw}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{\bar{P}}}$$

non linear bir denklem.
momentum denklemi

(M)

güçlü kuvvetler:
Hacim kuvvetleri

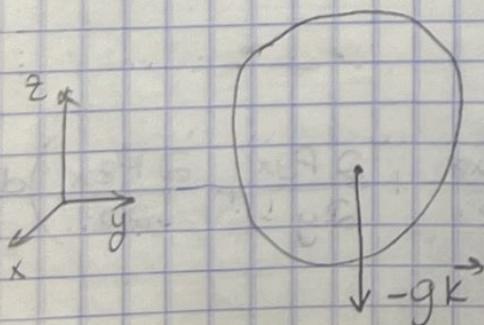
$$\vec{\bar{P}} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

Açısal momentumun korunumu prensibi uygulanırsa
(momentum denklemi $\vec{r}$ yer vektörü ile çarpılırsa)
 $\vec{\bar{P}}$ tansörünün simetrik olduğu bulunur.

$$\begin{aligned} P_{xy} &= P_{yx} \\ P_{xz} &= P_{zx} \\ P_{yz} &= P_{zy} \end{aligned}$$

Altı bağımsız bileşeni var.

* Statik $\vec{v} = 0$, $\frac{D\vec{v}}{Dt} = 0$ $\vec{f} = \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{\bar{P}}$



$$\begin{aligned} f_x &= f_y = 0 \\ f_z &= -g \end{aligned}$$

} suyun statik problemlerinde karşılaşılr.

$$\vec{\bar{P}} = \vec{\bar{P}}(\vec{D}) \quad \text{def. hızları}$$

bünge denklemi

Bünge denklemi:

Deneyler $\bar{P}$ gerilme tansörünün $\bar{D}$ def. hızları tansörünün bir fonk. old. gösterir. $\bar{p} = \bar{P}(\bar{D})$ denklemine bünge (yapı) denklemi denir. Bu denklem en basit halde def. hızları tansörünün lineer bir fonksiyonudur.

7 katsayı

$$P_{xx} = C_{11} D_{xx} + C_{12} D_{xy} + C_{13} D_{xz} + C_{14} D_{yz} + C_{15} D_{yy}$$

$$+ C_{16} D_{zz} + C_{17} \rightarrow \text{subit}$$

$$D_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$D_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = D_{yx} \quad (\text{Sim. tansör 6 bileşen var})$$

1 de subit var.

$$7 \left\{ \begin{array}{l} P_{xy} = \\ P_{xz} = \\ P_{yz} = \\ P_{yy} = \\ P_{zz} = \end{array} \right.$$

42 katsayı var. $\Rightarrow$ 3 katsayıya düşüyor

Tansör büyüklüklerinin özellikleri ve akış-

kanın özelliklerinin ve yapısının yönle değiş-

meyip, sim. olması (izotropi) nedeni ile 42

katsayı 3'e iner. (P, λ, μ) katsayılar.

Daha sonra basınç
denecek

viskozite katsayıları.

Bünge Denklemleri:

$$P_{xx} = P - \lambda \text{div } \vec{V} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$P_{yy} = P - \lambda \text{div } \vec{V} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$P_{zz} = P - \lambda \text{div } \vec{V} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$P_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = P_{yx}$$

$$P_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = P_{zy}$$

$$P_{xz} = P_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$P = P(x, y, z, t)$$

$$\lambda = \lambda(x, y, z, t)$$

$$\mu = \mu(x, y, z, t)$$

λ ve μ katsayıları

hız, sıcaklık ve basınç-

la çok az değiştiği

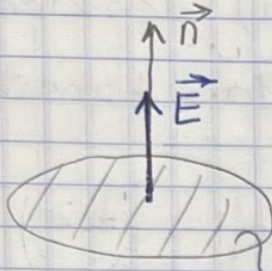
için genellikle sabit

kabul edilebilirler.

* Mükemmel akışkan

$$\lambda, \mu = 0$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

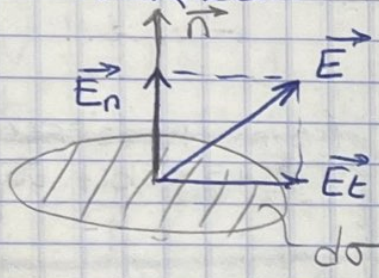


$$\vec{E} = \vec{n} \cdot \bar{P}$$

**** Mükemmel bir akışkanda**

do bir yüzeye etki eden gerilme kuvveti, yüzeye diktir. $\vec{E}_t = 0$

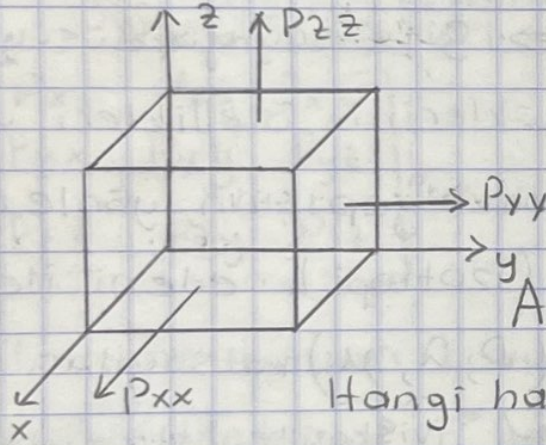
* Visköz akışkan



$$\vec{E} = \vec{n} \cdot \bar{P}$$

$$\vec{E}_t \neq 0$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & - & - \\ - & P_{yy} & - \\ - & - & P_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{genelde sıfırdan farklı.}$$



Stokes şartı:

$$A = \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3} = p \quad ?$$

Hangi halde gerilme tensörünün asal köşegeni üzerindeki 3 elemanın ortalaması p olabilir.

$$A = p - \lambda \operatorname{div} \vec{V} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$A = p - \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{div} \vec{V}$$

0 olmalı

$$A = p \text{ için}$$

$$1^0) \boxed{\operatorname{div} \vec{V} = 0}$$

(süreklilik denkleminde)

akışkan sıkıştırılmaz *** Stokes şartını sağlar**

$$2^0) \boxed{\lambda = -\frac{2}{3} \mu}$$

Viskoz ve Sıkıştırılabilen bir akışkanın hareket (momentum) denklemi (Navier-Stokes)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{div } \vec{P} \quad \text{vektörel denklem}$$

$\vec{x}$ yönündeki bileşeni

$$\underline{x}: \rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \lambda \text{div } \vec{V} - 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial U}{\partial y} - \mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu \frac{\partial U}{\partial x} - \mu \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

λ, μ sabit kabul edilirler çünkü basınçla değişimi çok az.

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V}) + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V}) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$\nabla^2 U$ Laplace operatörünün uygulaması

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V})$$

$$\rho \frac{DV_y}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 U + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \vec{V})$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 W + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \vec{V})$$

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \vec{V} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \vec{V})}$$

SIKIŞTIRILABİLİR NAVIER-STOKES. (Non-linear denklem)

ρ sabit değil, noktadan noktaya değişiyor.

* Stokes şartı $\rightarrow \lambda = -2\mu/3$

Özel Haller

* Mükemmel akışkan ($\lambda = 0, \mu = 0$)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p \quad (\text{Euler Denklemi}) \quad (\rho \text{ sabit veya deg. olabilir})$$

$$u = u(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad p = p(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad T = T(x, y, z, t)$$

$$\lambda, \mu, \vec{f} = \vec{g} \quad \text{biliniyor}$$

$\hookrightarrow$ Hacim kuvvetleri

6 Bilinmeyen var.

1 denklem $\rightarrow$ süreklilik denklemi

Momentum (Navier-Stokes) $\rightarrow$ 3 denklem veriyor.

Hal denklemi $G(p, \rho, T) = 0 \rightarrow$ 1 denklem

özel halde

$$m.G \rightarrow p = \rho.R.T$$

Enerji denklemi $\rightarrow$ 1 denklem

çözümü (Tyikerir)

6 denk-
lem.

a) Sıkıştırılamaz Akışkan

$\rho = \text{sabit ve biliniyor}$

b) Isı transferi yok ($T \rightarrow$ hal denkleminde bulunur.)

Bilinmeyenlerin sayısı 4'e iniyor : u, v, w, p

Bunları çözmek için $\left. \begin{array}{l} \text{Süreklilik} \rightarrow 1 \\ \text{momentum} \rightarrow 3 \end{array} \right\} \underline{4} \text{ denklem}$

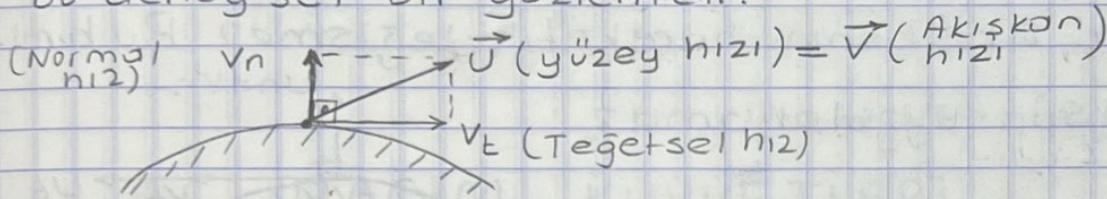
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div } \vec{V} = 0$$

SINIR ŞARTLARI

A) Çeperler (maddesel yüzey)

a) Visköz Akışkan :

Viskoz (sürtünmeli) bir akışkanın maddesel bir yüzey (çeper) etrafındaki akışında akışkan parçaları çepere tutunurlar ve çeper hızı ile hareket ederler, bu deney sel bir gözlemdir.



$$\vec{V} = \vec{U} \begin{cases} V_t = U_t \\ V_n = U_n \end{cases} \quad \text{Hareketsiz yüzey}$$

$$\vec{U} = 0 \Rightarrow \vec{V} = 0$$

$$V_t = V_n = 0$$

b) Mükemmel Akışkan (ideal, sürtünmesiz)

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{Nav.-Stokes}) \quad (\text{Sıkıştırılabilir akış için})$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p \quad (\text{Euler}) \quad \text{Mükemmel}$$

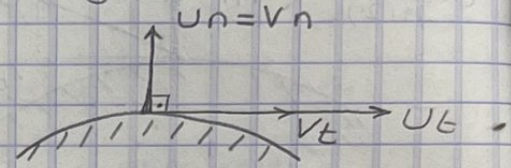
$$y'' - y = 0 \Rightarrow y = A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} + C \quad \text{Denklemin derecesi kadar sınır şartı lazım.}$$

$$y' - y = 0 \Rightarrow y = A e^{\lambda y} + B$$

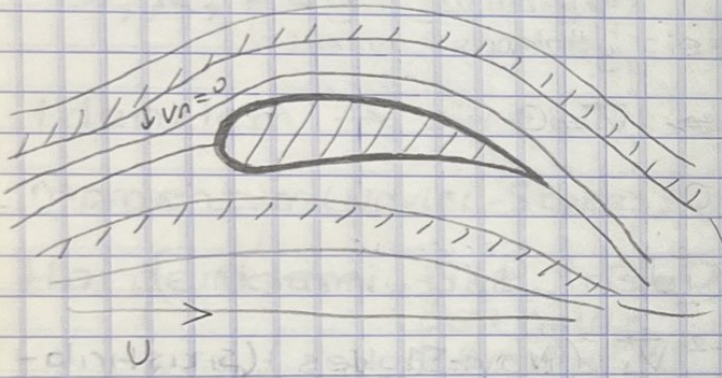
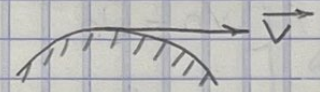
$$\left. \begin{array}{l} V_t = U_t \\ V_n = U_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ şart var } 1 \text{ sıatılıyor } 2 \text{ iro Eulerin derecesi } \\ \text{Navier Stokes den } 1 \text{ az.} \end{array}$$

Euler denkleminin çözümünün var ve tek olabilmesi için çeperdeki iki sınır şartından ($V_n = U_n$, $V_t = U_t$) birisinden vaz geçilmesi (sınır şartının gevşetilmesi) gerekir. Akışkan taneleri çeperi delip geçemeyeceğinden $V_n = U_n$ şartını korumak fiziksel olarak daha uygundur. Mükemmel bir akışkan da hızın

çepere dik bileşeninin, çepere göre sıfır olduğu kabul edilir. Bu durumda, akışkan taneleri çeper üzerinde kayabilir, ($V_t \neq U_t$) Mükemmel bir akışkanın daimî hareketinde herhangi bir akım yüzeyi bir çeper olarak alınabilir yani bu akım yüzeyi üzerinde sanki maddesel bir yüzey varmış gibi düşünebilir, akışkanın hareketi değişmez. Bu kural viskoz akışkana uygulanamaz.

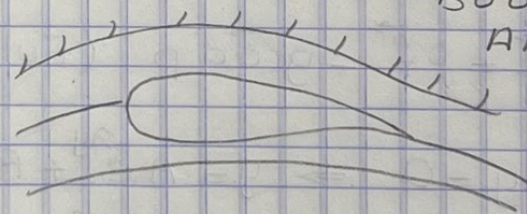


çeper duruyorsa $U_n = V_n = 0$



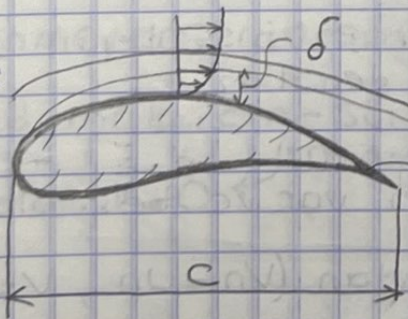
Bu çeperler varolursa, bunların varlığı etkilemeyecekti. Akım çizgilerini

Bu olay mük. Akış. için geçerli.



Viskoz akışkan :

U_∞



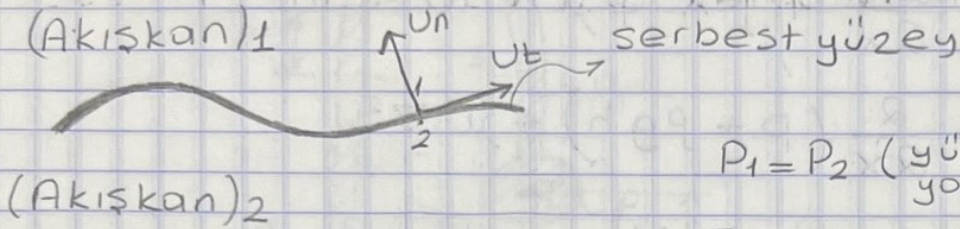
$$\frac{\delta}{c} \ll 1 \quad Re_c \gg 1 \quad \frac{U_\infty c}{\nu} \gg 1$$

Akım çizgisi

çeperden etkileniyor.

Kanattan sonsuz uzaklıkta hız, düz akım hızına eşittir.

B) Serbest Yüzey:



$$P_1 = P_2 \text{ (yüzey gerilmesi yok ise)}$$

$$T_1 = T_2$$

$$U_{n1} = U_{n2} \text{ (Herzaman)}$$

$$U_{t1} = U_{t2} \text{ (gerçek akışkan)}$$

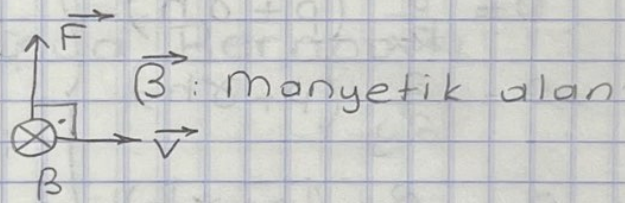
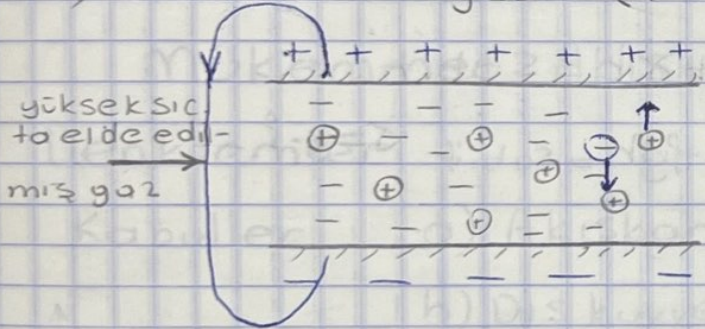
$$U_{t1} \neq U_{t2} \text{ (mükemmel akış.)}$$

HACIM KUVVETLERİ

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

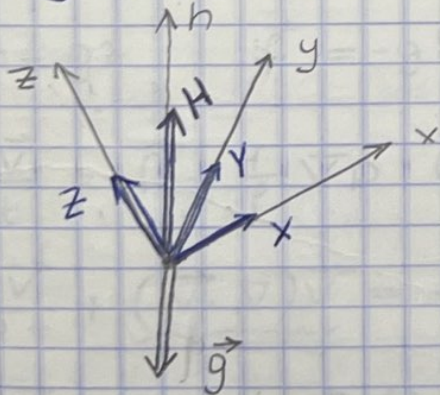
1) Ağırlık $\vec{f} = \vec{g}$

2) Elektromanyetik (Magneto-hidrodinamik)



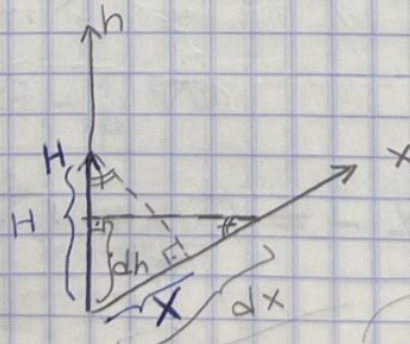
Many alan uygulanırsa ve bir tel ile birleştirilirse elek. akımı elde edilir.

Ağırlık kuvveti $\rho \vec{g}(x, y, z)$



\$h\$: yükseklik

$$H = -g \text{ (h yönünde etki eden ağırlık kuvveti)}$$



$$H = -g$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{X}{H} \Rightarrow X = H \frac{\partial h}{\partial x} \quad Y = H \frac{\partial h}{\partial y} \quad Z = H \frac{\partial h}{\partial z}$$

mom. denk. yerine konursa:

$$x: \rho \frac{DU}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho X + \mu \nabla^2 U$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g h) + \mu \nabla^2 U$$

$$\rho g = \gamma \text{ (özgül ağırlık)} \quad \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T^2} = \frac{M}{L^2 T^2}$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) + \mu \nabla^2 U$$

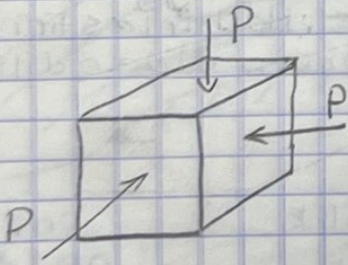
$$\rho \frac{DU}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) + \mu \nabla^2 U$$

$$\rho \frac{DW}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) + \mu \nabla^2 W$$

HİDROSTATİK

$$U = V = W = 0$$

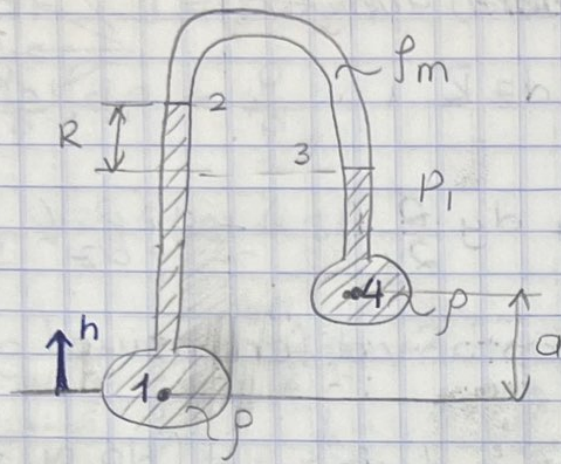
$$\left. \begin{array}{l} x: 0 = \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) \\ y: 0 = \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) \\ z: 0 = \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) \end{array} \right\} \begin{array}{l} p + \gamma h = \text{sabit} \\ p + \gamma h = \text{sabit} \quad \gamma = g \cdot \rho \end{array}$$



$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0.$$

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = p$$

Örnek!



$$P_1 - P_4 = f(\rho, R, \rho, \rho_m)$$

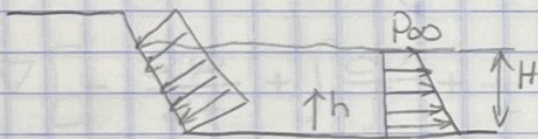
$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

$$P_2 - P_3 = \rho_m g (h_3 - h_2)$$

$$P_1 - P_4 = \rho g a + (\rho - \rho_m) g R$$

$$P_3 - P_4 = \rho g (h_4 - h_3)$$



$$P + \rho h = P_{00} + \rho H$$

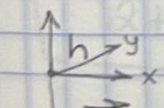
$$P = P_{00} + \rho (H - h)$$

Mükemmel Akışkanda Bernoulli

Denklemleri :

Kabuller : a) Akışkan mükemmel.

b) Dış kuvvet bir potansiyelden türüyor



$$\vec{f} = -\rho \vec{g} \Rightarrow dG = -\nabla G$$

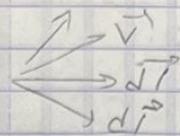
$$G = gz \quad \vec{f} = -g \vec{k}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{Euler})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla G - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \underbrace{\vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})}_{\vec{j}} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla G \quad (1)$$

↳ (herhangi bir çizgi elemanı alınıyor)



$$\vec{dP} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\vec{dP} \cdot \nabla () = dx \frac{\partial}{\partial x} () + dy \frac{\partial}{\partial y} () + dz \frac{\partial}{\partial z} ()$$

$$= d () = \text{Toplam diferansiyel}$$

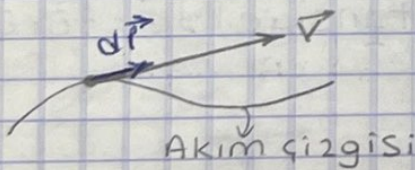
$$\vec{dP} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho} (\underbrace{\vec{dP} \cdot \nabla}_d) p = \frac{1}{\rho} dp = d \int \frac{dp}{\rho} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{d} \cdot \nabla \int \frac{dp}{\rho}}$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + G \right) = \vec{V} \wedge \vec{\zeta} \quad (2)$$

1) Daimi hareket $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

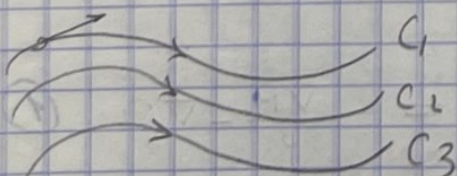
$$\vec{V} \cdot (2) \Rightarrow \vec{V} \cdot \nabla \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + G \right) = \vec{V} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{\zeta}) = 0$$



$$\vec{V} = |\vec{V}| \frac{d\vec{P}}{|d\vec{P}|}$$

$$\frac{|\vec{V}|}{|d\vec{P}|} \vec{dP} \cdot \nabla H = 0 \Rightarrow \vec{dP} \cdot \nabla H = 0 = dH \Rightarrow \boxed{H = \text{sabit}}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + G = \text{sabit} = \left(\text{Akım çizgileri boyunca} \right)$$



Akım çizgileri

$$C_1 \neq C_2 \neq C_3$$

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{st}}$$

Özel hal: $\rho = \text{sabit}$ (sıkıştırılamaz akışkan)

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = st.$$

$$\gamma = \rho \cdot g \Rightarrow p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \gamma z = st.$$

Basınç
enerjisi

Kinetik
enerji

Potansiyel
enerji.

Akım çizgileri
boyunca

2) Potansiyel Hareket:

$$\vec{f} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \nabla \phi$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + G \right) = 0.$$

$$\nabla \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V} + G \right] = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$d\vec{P} \quad \textcircled{4} \Rightarrow d \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)(\nabla \phi) + C \right] = 0$$

$$\boxed{-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + G = \text{sabit}} = F(t) \quad \textcircled{5}$$

Zamanla değişen Bernoulli sabiti

3) Daimi, potansiyel hareket.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow \boxed{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz = st.} \quad \begin{array}{l} \text{(Her zaman, her yerde} \\ \text{sabit)} \\ \text{(sıkıştırılabilir akışkan)} \end{array}$$

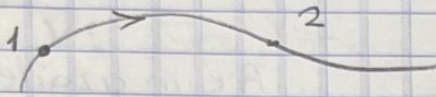
* Akışkan sıkıştırılamaz ise:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \gamma z = \text{sabit} \quad \text{(Her zaman her yerde)}$$

21-5-1986

* Sürtünmeli akışkanda Bernoulli

denklemini:

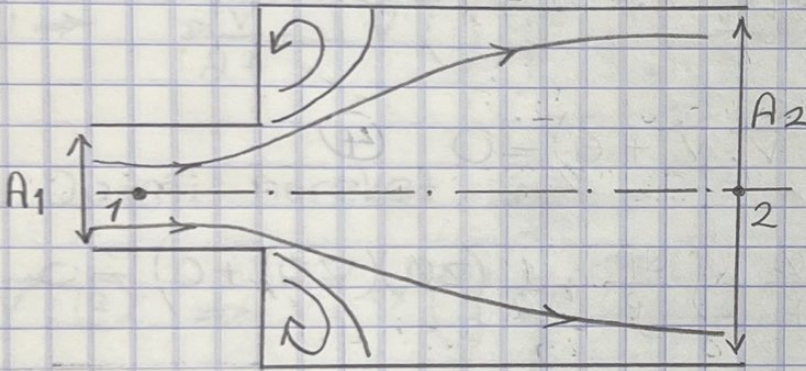


akışkan sürtünmesizse (hareket daimi ve potansiyel)

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum_{1-2} \text{Enerji kayıpları}}$$

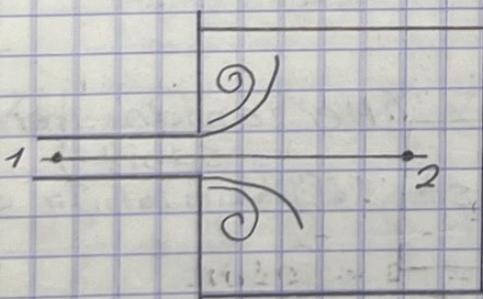
$$\boxed{\sum_{1-2} = K_L \frac{v_1^2}{2g}} \quad K_L, \text{ boyutsuz.}$$

a) Ani genişleme:



$$K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \text{ Gösterilecek}$$

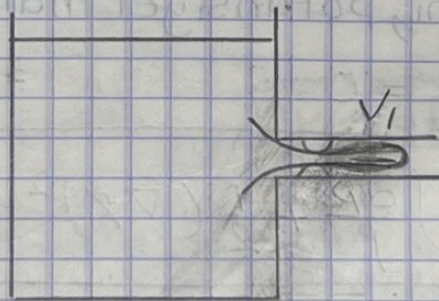
b) Hazne giriş



$$K_L = 1$$

$$v_2 = 0$$

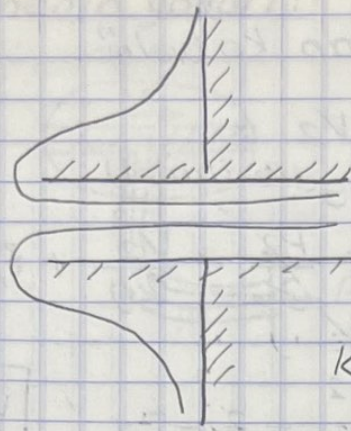
c) Hazne çıkış



$$K_L = 0,5$$

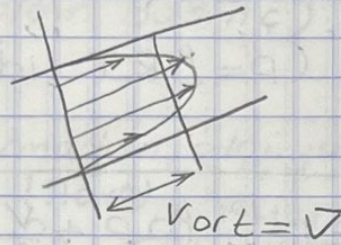
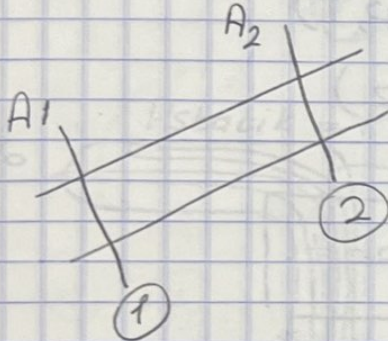


$$K_L = 0,01$$



$$K_L = 1.$$

d) Borularda akış



Daimi

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot \bar{V}_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot \bar{V}_2$$

şayet $\Rightarrow A_1 = A_2$ ise $\rho_1 = \rho_2$ (sıkıştırılabilir akışkan)

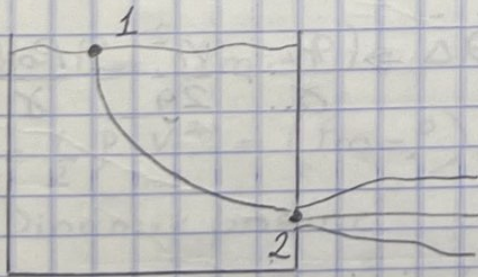
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + \sum_{1-2}$$

$$K_L = \lambda \frac{L}{D}$$

λ : sürtünme katsayısı

Toriçelli Formülü:

Bernoulli denk.

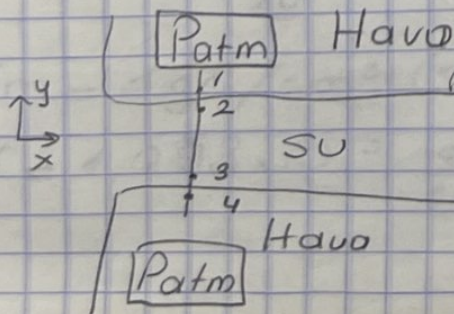


$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_{1-2}$$

$$\sum_{1-2} = 0$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm.}$$

↓ Bunun nedeni



serbest yüzey

$$p_1 = p_2$$

$$p_3 = p_u$$

$$p_2 = p_3 = p_{atm.}$$

Sıkıştırılabilir akışkan kabulü

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + z_{1-2}$$

(V₂'ye göre ihmal)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1} \ll 1$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = z_1 - z_2$$

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

Sıkıştırılabilir akışkan $\rho = \rho(p, T)$

* Sabit sıcaklık: ($p = \rho R T$ ideal gaz)

$$\frac{p}{\rho} = \text{sabit}$$

$$\text{Gösterilecek} \rightarrow z + \frac{p}{\rho} \ln p + \frac{V^2}{2g} = \text{sabit}$$

* izantropik akış: $\frac{p}{\rho^k} = \text{sabit} = p \cdot \rho^{-k} \rightarrow \text{göster!}$
sürtünmesiz, adyabatik p^k

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{sabit}$$

Dinamik ve Toplam Basınç Tanımları



$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2g}$$

$z_1 = z_0$ olsun.

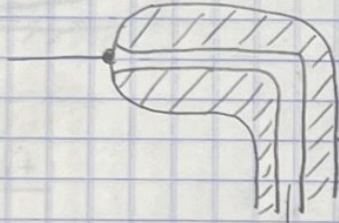
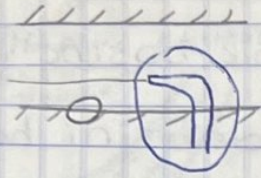
$$V_0 = 0 \rightarrow \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho}$$

Dinamik basınç.

$$p_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho V^2$$

↳ statik basınç
Durma basıncı

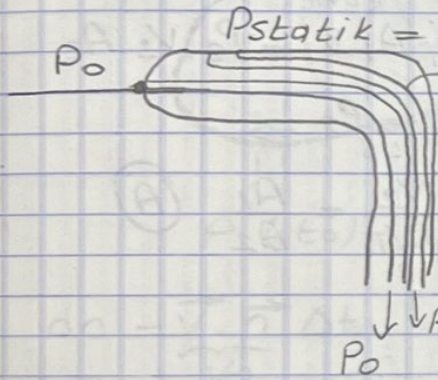
statik basıncı ölçmenin yolları:



Pitot tübü

P_0 (Toplam basınç)

P_{statik}



$P_{statik} = P$

(Durdurmadan ölçüyor)

(Hava)

P_0

$P_{statik} = P$

α

Δh

ρ_m (su)

A

B

$$P + \rho g h = \text{sabit}$$

ρg

$$P_0 + \rho g a + \rho g \Delta h$$

$$= P + \rho g a + \rho_m g \Delta h$$

$$P_0 - P = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

$$P_d = \frac{1}{2} \rho v^2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

↳ Dinamik basınç

(Havanın hızını bulmakta kullanılıyor)

$$\rho = \rho_m \Rightarrow \frac{v^2}{2g} \rho = (\rho_m - \rho) \Delta h \approx \rho_m \Delta h$$

$$\rho_m = 1 \text{ gr./cm}^3 \text{ (su)}$$

$$\rho = 1,293 \times 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \text{ (Hava)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \Delta h \rho_m}{\rho}}$$

sıkıştırılabilir ve düşük hızlarda geçerli
Mach $\approx 0,4$

boyutlar.

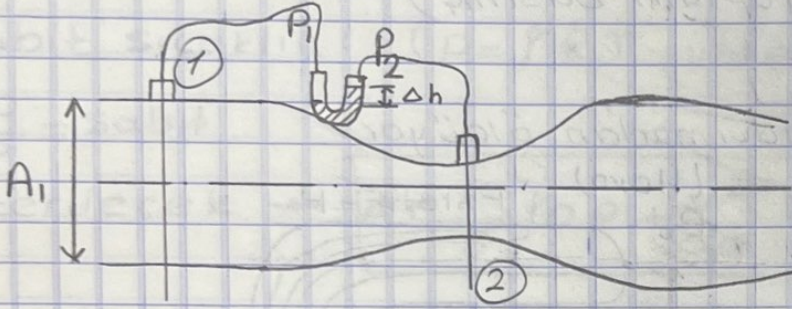
Soru: Deney odasının $\checkmark$ 30×20 cm olan bir hava tüneli içindeki pitot tübünün ölçtüğü dinamik basınç 12 mm su sütunudur. Tüneldeki akımın debisini hesaplayın.

$$\delta_{su} = 1 \text{ gr.kuvvet/cm}^3$$

$$v = 3,89 \sqrt{\Delta h (\text{mm})}$$

$$\dot{m} = \rho v A = 1,05 \text{ kg/s}$$

Borularda.
Venturi Tübü (Hız ve debi ölçer)



kütle

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} \quad (A)$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)$$

$$v_2^2 = \frac{2 \Delta p}{\rho \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right)}$$

$$(A) \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} \quad (B)$$

$\frac{A_2}{A_1}, \rho \rightarrow$ Biliniyor.

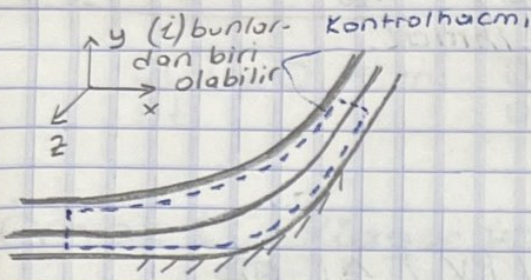
Δp ölçülüyor

(B) $\rightarrow v_2$ hesaplanıyor.

(A) $\rightarrow v_1$ " "

$$\dot{m} = \rho \cdot A_1 v_1 = \left[\frac{M}{T} \right]$$

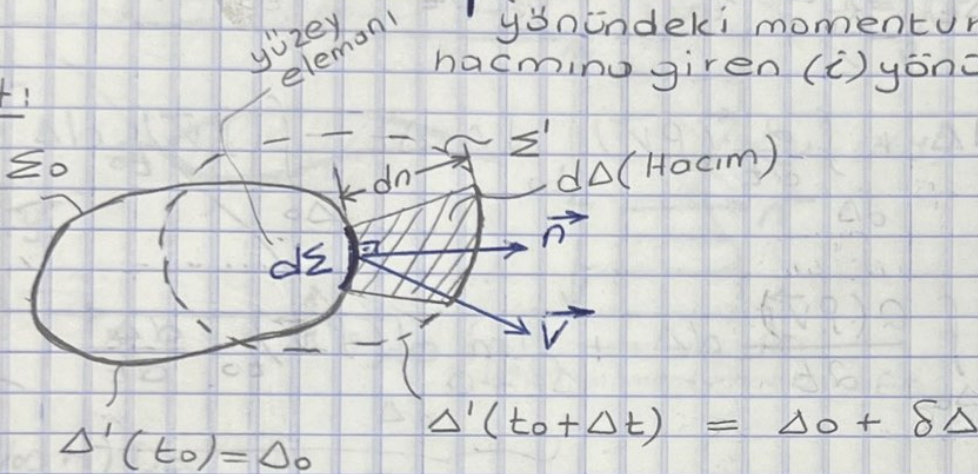
Momentum Teoremi



(Kontrol hacmine (i) yönünde etkiyen kuvvetler)

$\frac{d}{dt} \left[\text{momentum} \right] = \text{net force}$
 $\frac{d}{dt} \left[\text{momentum} \right] = \text{net force}$
 $\frac{d}{dt} \left[\text{momentum} \right] = \text{net force}$

ispatı:



$$dn = \underbrace{\vec{V} \cdot \vec{n}}_{V_n} \Delta t$$

$$d\Delta = (d\Sigma)(dn) \rightarrow \delta\Delta = \int_{\Sigma_0} d\Delta$$

Σ_0, Δ_0 : Uzayda sabit kontrol hacmi^{ve} yüzeyi.

Σ', Δ' : Aynı akışkan parçacıklarını içeren hareketli bir kontrol hacmi^{ve} yüzeyi.

$$\vec{F} = \sum m \cdot \vec{a} = \sum m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \sum m\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}$$

$\vec{M}(\text{momentum})$

$$\vec{M} = \sum m \cdot \vec{v} = \int \underbrace{\vec{v} \cdot dm}_{\rho d\Delta} = \int_{\Delta'(t)} \rho \cdot \vec{v} d\Delta$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Delta'} \rho \cdot \vec{v} \cdot dV}$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta_0 + \delta\Delta} (\rho \cdot \vec{v})_{t_0 + \Delta t} d\Delta - \int_{\Delta_0} (\rho \cdot \vec{v})_{t_0} d\Delta}{\Delta t}$$

$$(\rho \vec{v})_{t_0 + \Delta t} = (\rho \vec{v})_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v})_{t_0} \Delta t + \underbrace{\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \vec{v})_{t_0} \Delta t^2}_{ihmal.} + \dots$$

$$\int_{\Delta_0 + \delta \Delta} () d\Delta = \int_{\Delta_0} () d\Delta + \int_{\delta \Delta} () d\Delta$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\Delta_0} (\rho \vec{v})_{t_0} d\Delta + \int_{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v})_{t_0} \Delta t \cdot d\Delta \right.$$

$$\left. + \int_{\delta \Delta} (\rho \vec{v})_{t_0} d\Delta + \int_{\delta \Delta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v})_{t_0} d\Delta \cdot \Delta t - \int_{\Delta_0} (\rho \vec{v})_{t_0} d\Delta \right]$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta_0} \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} d\Delta + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\delta \Delta} (\rho \vec{v})_{t_0} \frac{d\Delta}{dt}$$

$$+ \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\delta \Delta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d\Delta}_{I_3}$$

$$d\Delta = d\Sigma (\vec{v} \cdot \vec{n}) \Delta t$$

$$I_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\delta \Delta} (\rho \vec{v})_{t_0} \frac{(d\Sigma) \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

$$I_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Sigma_0} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

$$I_3 = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \delta \Delta \rightarrow 0}} \int_{\delta \Delta} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d\Delta = 0$$

$$\vec{F} = \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) \right) d\Delta + \int_{\Sigma_0} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta_0} (\rho \vec{v}) d\Delta = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} + \int_{\Sigma_0} (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma}$$

1. terim: kuvvetler

2. terim: sabit kontrol hacmindeki momentumun zamanla değişimi (daimi hareketle = 0)

3. : kontrol hacminin yüzeylerinden alan momentum akışı

(-) içeri giren momentum

(+) dışarı çıkan "

28-5-1986

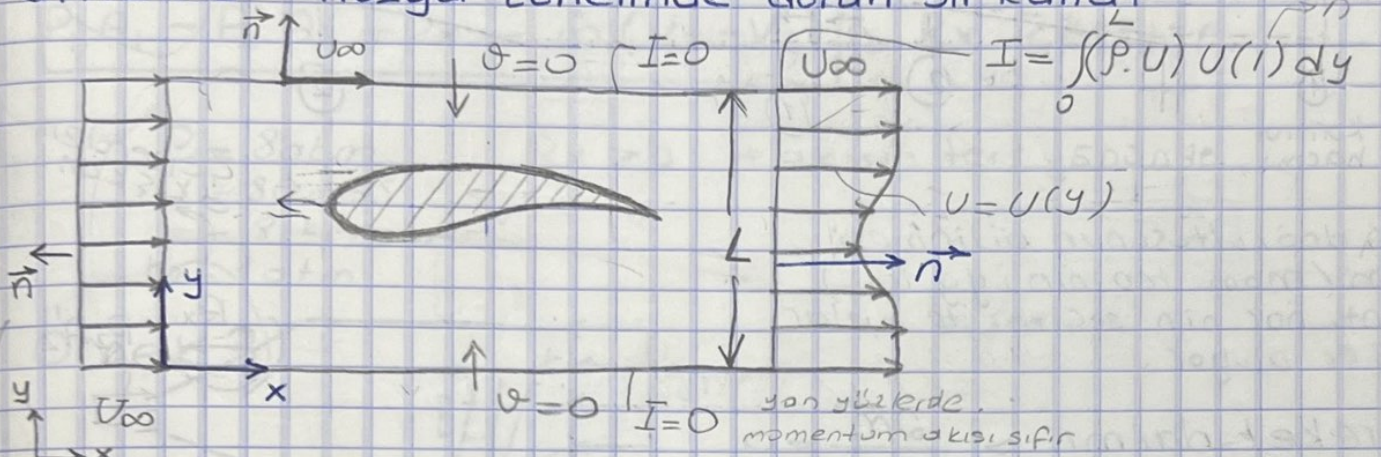
Daimi hareket $\frac{\partial}{\partial t} () = 0$

↓

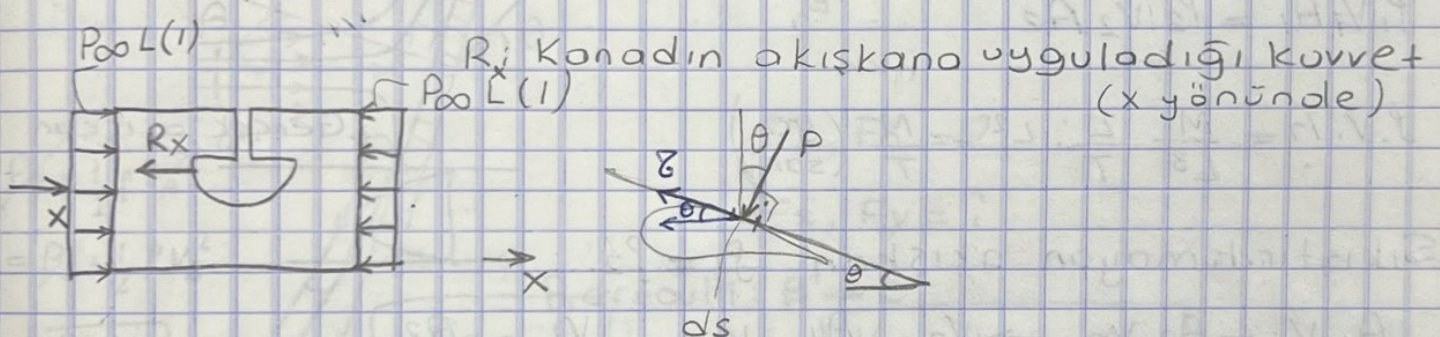
$$\frac{D()}{Dt} \neq 0 \quad \text{örni: } \frac{DU}{Dt} \neq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Örnek 1: Rüzgar tüneline duran bir kanat

(hareket daimi)

yon yüzlerde
momentum akısı sıfır

$$-(\rho \cdot U_\infty \cdot A) U_\infty$$

 R_x Kanadın akışkana uyguladığı kuvvet
(x yönünde)

$$\oint (-P \sin \theta - \tau \cos \theta) ds = R_x$$

$$P_\infty \cdot L - R_x - P_\infty \cdot L = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint \rho U^2 dy \cdot dx \right) = \underbrace{P_\infty \cdot U_\infty^2 \cdot L}_{0 \text{ (Daimi hor.)}} + \int_0^L \rho \cdot U^2 dy - \int_0^L \rho \cdot U_\infty^2 dy$$

$$R_x = \int_0^L \rho (U_\infty^2 - U^2) dy$$

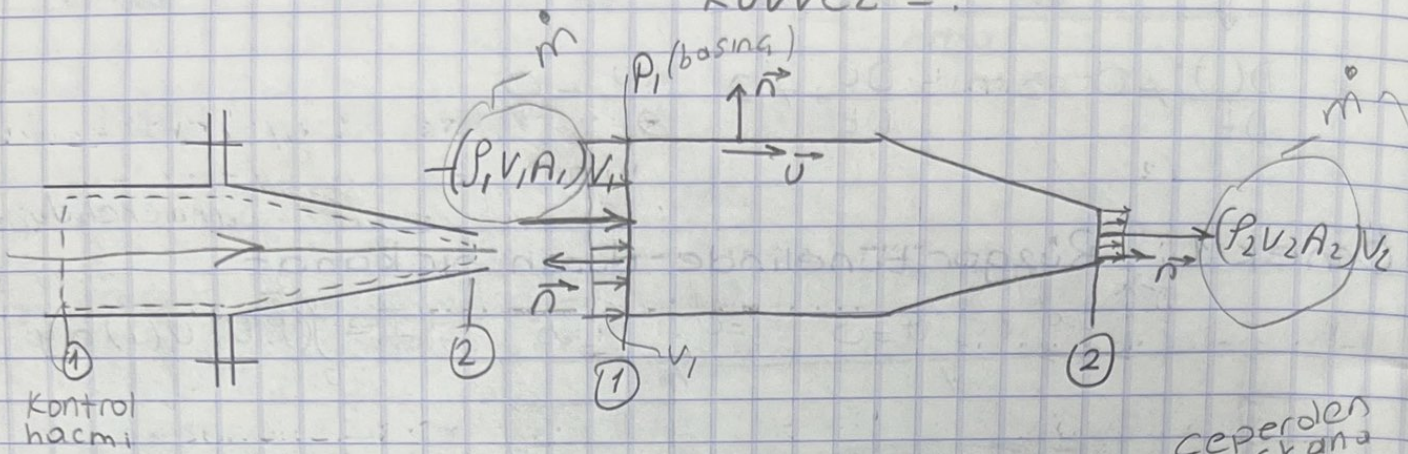
$U_\infty > U$
 $R_x > 0$ (Sola doğru)

Akışkanın kanada uyguladığı kuvvet $-R_x$ (Sağa doğru)

↓ Sürükleme kuvveti

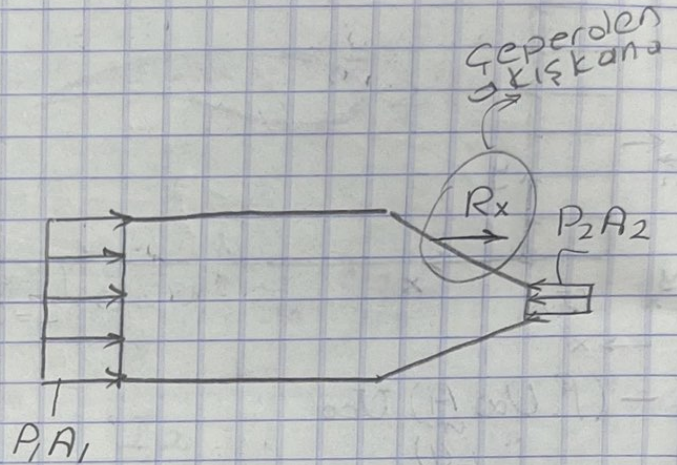
2) İtforiyeci hortumu.

Akışkanın hortuma uyguladığı kuvvet = ?



hızın doğrultusunun bilinmesi
lazım (mom. teo. nin uyg. için)
kont. hac. nin seçimi ile hızlar
teğ er oluyor.

Hareket daimi $\rightarrow \frac{d\vec{m}}{dt} = 0$
(mom. zamanla değ. miyor)



$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\rho \cdot V \cdot A = \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot L^2 = \frac{M}{T} \left(\frac{\text{gr.}}{\text{san}} \right)$$

Sıkıştırılamayan akışkan $\rho_1 = \rho_2$

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot V_1$$

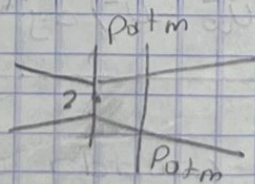
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Bernouilli denklemleri:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \frac{V_1^2}{V_2^2} \right]$$

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho V_2^2}{2g} \left[1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right]$$



$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)}}$$

P_1 = biliniyor.
 $P_2 = P_{atm}$.

debi

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot V$$

Q (Hacimsel debi)

Kütle debisi

$$Q = A_2 \cdot V_2$$

(y yönünde yapılırsa kuvvet yok momentum giriş çıkışı yok sadece birbirini potansiyel basınç kuv.leri var)

$$P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A_2 + R_x = \dot{m} (V_2 - V_1) \rightarrow R_x \text{ çabucuk.}$$

$$P_1 = 8 \text{ atm.}$$

$$= 80 \text{ mSS}$$

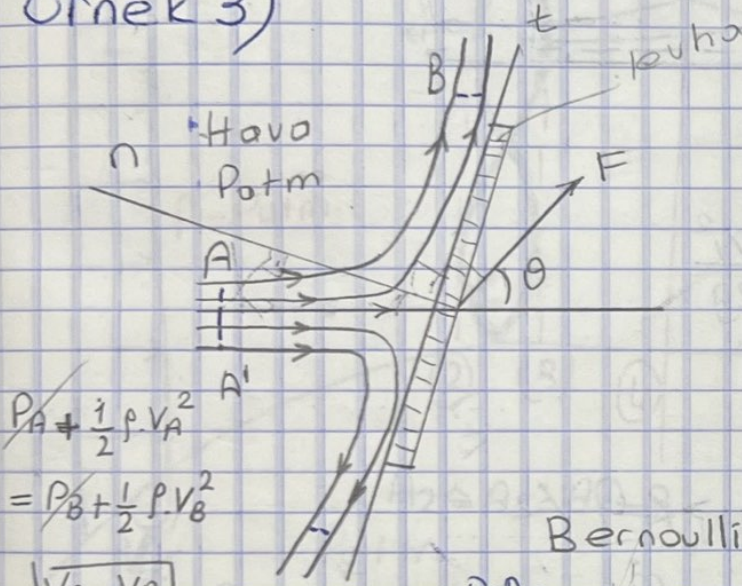
$$= 8 \text{ kP/cm}^2$$

$$P_2 = 1 \text{ atm}$$

$R_x > 0 \rightarrow$ akışın ters yönünde.

Örnek 3)

sujeti.



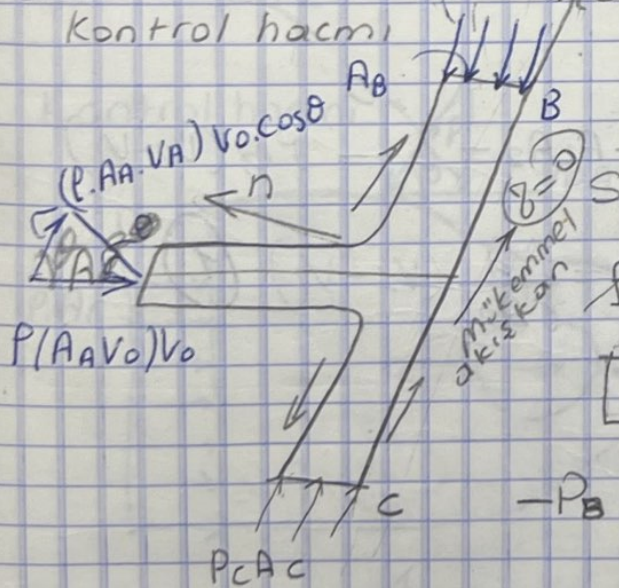
$$F_t, F_n = ?$$

$$F_x, F_y = ?$$

Bernoulli: $A' \rightarrow C$

$$V_A = V_B = V_C = V_0$$

$\Sigma F_t = \text{momentum dışarı} - \text{momentum içer.}$



$$\text{Sınır şartı } P_B = P_C = P_{\text{atm.}}$$

$$\rho \cdot V_A \cdot A_A = \rho \cdot A_B \cdot V_B + \rho \cdot A_C \cdot V_C$$

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

$$-P_B \cdot A_B + P_C \cdot A_C + \gamma = (\rho \cdot A_B \cdot V_B) V_0$$

$$-(\rho \cdot A_C \cdot V_C) V_0 - (\rho \cdot A_A \cdot V_A) V_0 \cos \theta$$

$$Q = A \cdot V$$

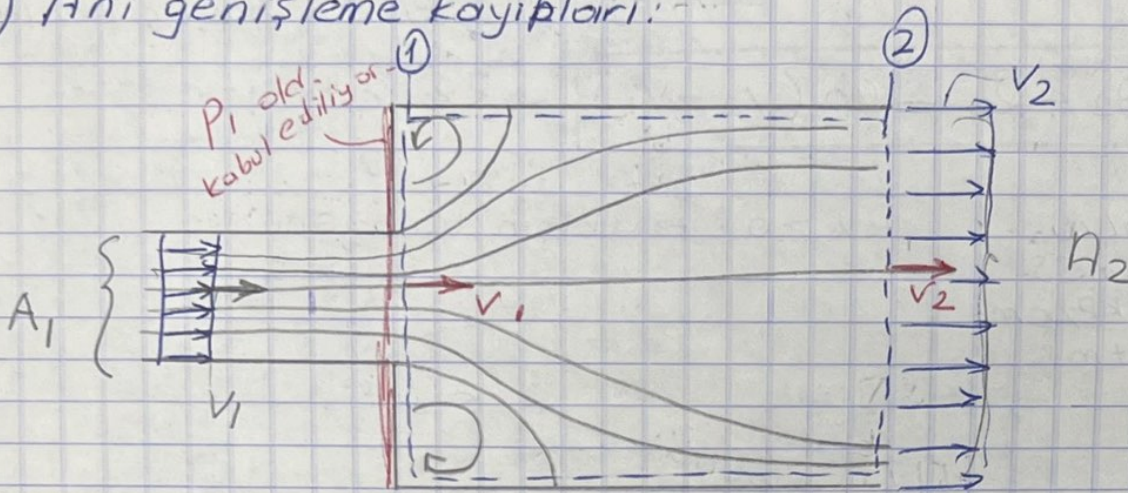
$$\left. \begin{aligned} Q_B - Q_C &= Q_0 \cdot \cos \theta \\ Q_A &= Q_B + Q_C \end{aligned} \right\}$$

$$Q_A = Q_0 (1 + \cos \theta) / 2$$

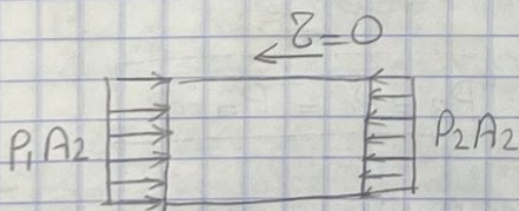
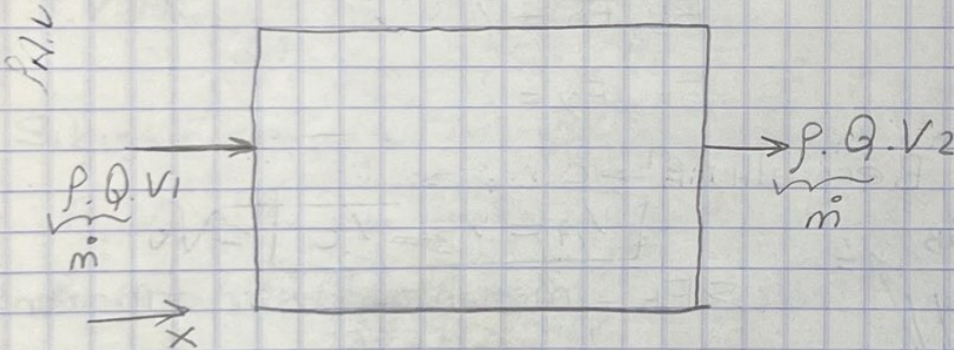
$$Q_B = Q_0 (1 - \cos \theta) / 2$$

$$F_n = \rho \cdot Q_0 \cdot V_0 \cdot \sin \theta$$

4) Ani genişleme kayıpları:



$$K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad \zeta_{1-2} = K_L \frac{v_1^2}{2g}$$



$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - \cancel{\rho Q z}^0 = \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\rho Q}{\rho A_2} (v_2 - v_1) \quad (1)$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{1-2}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \zeta_{1-2}$$

$$(1) \rightarrow \frac{Q}{A_2 g} (v_2 - v_1) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \zeta_{1-2}$$

$$Q = A_2 \cdot V_2$$

$$\frac{V_2}{g} (V_2 - V_1) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \zeta_{1-2}$$

$$\frac{1}{g} (V_2^2 - V_1 V_2) = \frac{1}{2g} (V_2^2 - V_1^2) + \zeta_{1-2}$$

$$\zeta_{1-2} = \frac{1}{2g} (2V_2^2 - 2V_1 V_2 - V_2^2 + V_1^2) = \frac{1}{2g} (V_1 - V_2)^2$$

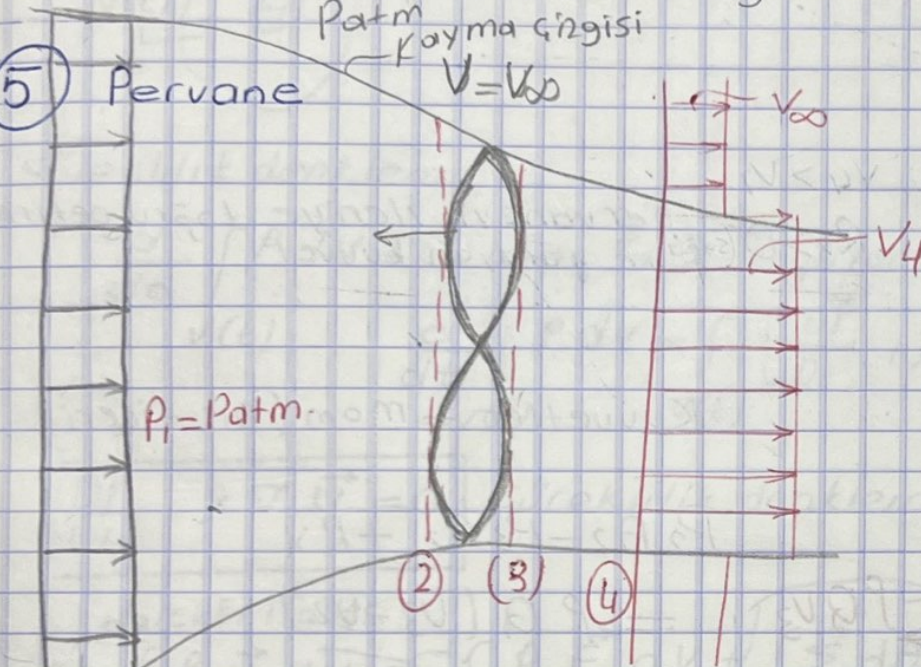
$$\zeta_{1-2} = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = K_L \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow K_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

5

Pervane

P_{atm}
Kayma girişisi

$V = V_{\infty}$



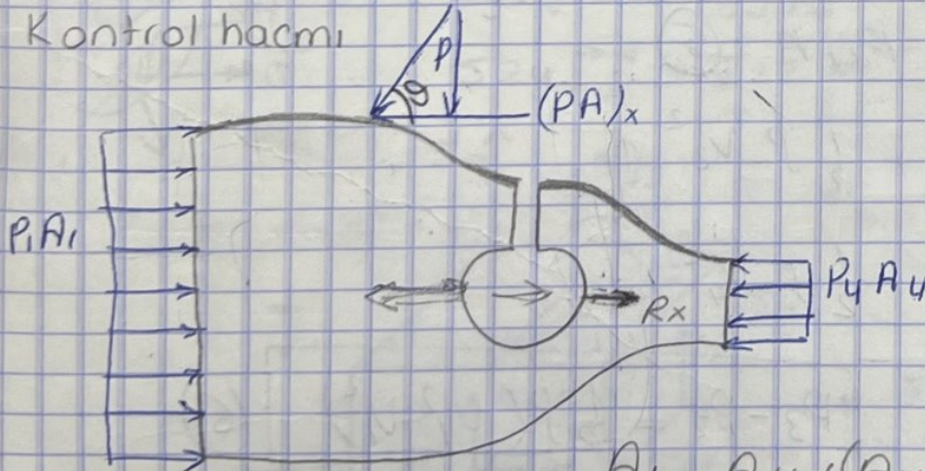
$$A = \pi \cdot R^2$$

$$A_2 \cong A_3 = A \Rightarrow V_2 A_2 = V_3 A_3 \Rightarrow \boxed{V_2 = V_3}$$

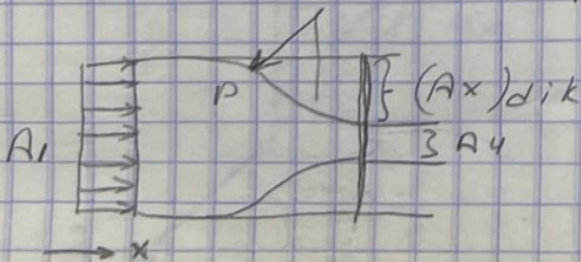
$$= V_4 \cdot A_4$$

$P_3 > P_2$

Kontrol hacmi



$$A_1 = A_4 + (A_x)_{dik}$$



$$P \sin \theta$$

20

$$(P_1 \sin \theta A = P(A \sin \theta) = P(A_x) \text{dik}$$

$$P_1 A_1 = P_{atm}(A_x) \text{dik} + \underbrace{P_4 A_4}_{P_{atm} A_u}$$

$$P_1 A_1 = P_1 (A_x) \text{dik} + P_4 A_4 \quad (2)$$

etki eden kuvvetler 0 (2) den

$$\begin{aligned} * P_1 A_1 - P_4 A_4 - P_{atm}(A_x) \text{dik} + R_x &= \\ &= \rho Q (V_4 - V_1) \end{aligned}$$

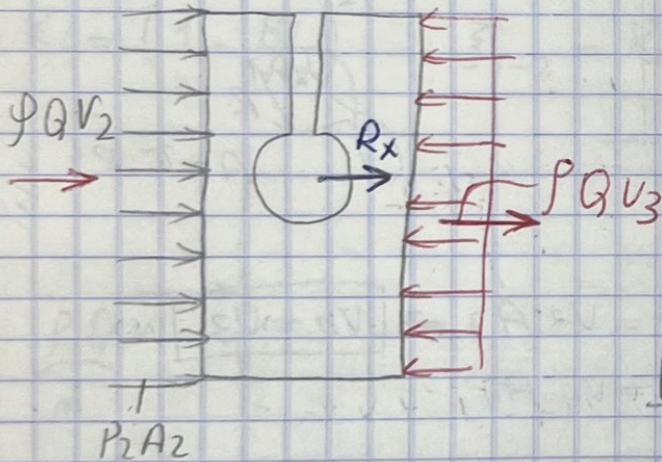
$$\boxed{R_x = \rho Q (V_4 - V_1)}$$

(3)

$$V_4 > V_1$$

$R_x > 0$ (sağa) pervaneyi ileriye doğru getirmeye yarayan kuvvet.

Kuvvetler = mom (Dış - içeri)



$$\begin{aligned} P_2 A_2 - P_3 A_3 + R_x &= \\ &= \rho Q (V_3 - V_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{R_x = (P_3 - P_2) A} \quad (4)$$

$$\rho Q (V_4 - V_1) = (P_3 - P_2) A \quad (5)$$

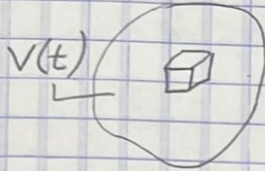
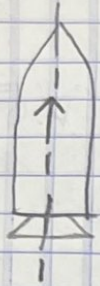
$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho V_4^2$$

$$V_2 = V_3 = V$$

$$\boxed{P_3 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (V_4^2 - V_1^2)} \quad (6)$$

$$(5) \text{ ve } (6) \rightarrow \boxed{V = \frac{V_1 + V_4}{2}}$$



$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla Q + \theta \frac{\partial Q}{\partial y} + \omega \frac{\partial Q}{\partial z}$$

θ : Akışkana ait herhangi bir skaler büyüklük

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \theta dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \cdot \nabla \cdot \vec{U} \right] dV$$

Süreklilik denklemi

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \Rightarrow \rho = \theta \text{ koyulursa}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{U} \right] dV = 0$$

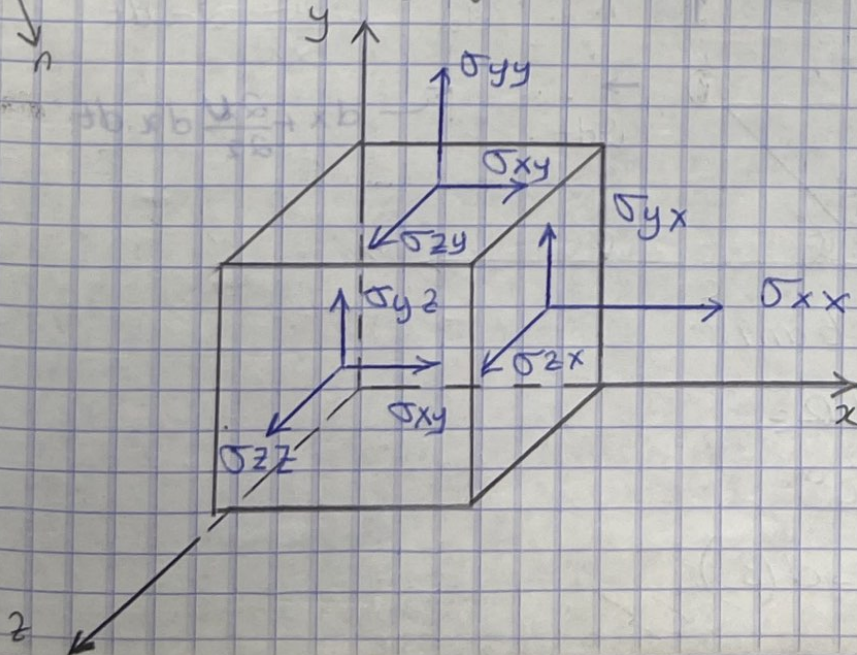
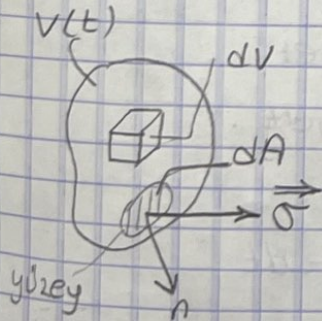
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{U} = 0} \text{ süreklilik denklemi}$$

Hareket ifadesi

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \cdot \vec{U} \cdot dV = \int_{V(t)} \rho \cdot \vec{F} \cdot dV + \int_A \vec{\Sigma} \cdot d\vec{A} \quad (*) \perp$$

diadik gösterim

$$\vec{\Sigma} = \sigma_{xx} \vec{i} \vec{i} + \sigma_{xy} \vec{i} \vec{j} + \sigma_{xz} \vec{i} \vec{k} + \sigma_{yx} \vec{j} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} \vec{j} + \sigma_{yz} \vec{j} \vec{k} + \sigma_{zx} \vec{k} \vec{i} + \sigma_{zy} \vec{k} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k} \vec{k}$$



$$\vec{\Sigma}_x = \vec{\sigma} \cdot \vec{i}$$

$$(*) \rightarrow \int_A \vec{\Sigma} dA = \int_A \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA$$

$$\vec{\Sigma}_y = \vec{\sigma} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\Sigma}_z = \vec{\sigma} \cdot \vec{k}$$

Gauss teoremlerinden (Div.) $\int_A \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{\sigma} dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{V(t)} \left[\frac{D(\rho \vec{u})}{Dt} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{u} \right] dV$$

$$= \int_{V(t)} \left[\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \vec{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) \right] dV$$

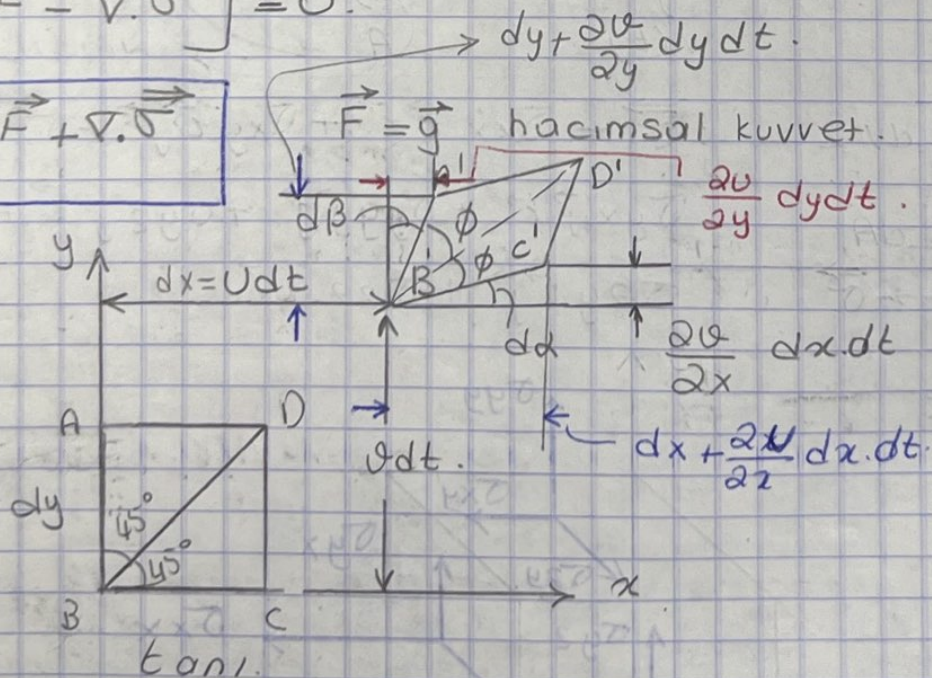
$= 0$ (süreklilik denklemi)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV$$

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{V(t)} (\nabla \cdot \vec{\sigma}) dV$$

$$\left[\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{F} - \nabla \cdot \vec{\sigma} \right] = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma}}$$



$$(\phi + d\alpha) - 45 = d\alpha_2$$

$$2\phi + d\alpha + d\beta = 90^\circ$$

$$d\alpha_2 = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta)$$

$$d\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\tan^{-1} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

Burada deform.
yok sadece dönme
var.

$$d\beta = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(\tan^{-1} \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy \cdot dt}{dy + \frac{\partial u}{\partial y} dy \cdot dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\frac{d\alpha_z}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\vec{w} = 2 \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \nabla \wedge \vec{u}$$

↗ çevri ↗ açısal hız

$$\frac{d\alpha_y}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

3) Deformasyon old. zaman

birim uzama benzer şek.

$$e_{xx} dt = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dt) - dx}{dx}$$

$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$
$e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y}$
$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$

$\frac{1}{2}(d\alpha + d\beta)$ xy düzlemindeki birim açı değişimi.

birim açı değ. hızı

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

örn:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

örn:

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$i=2, j=1,2,3$ 2. satır bulunur.

$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i=1, j=1,2,3 \quad e_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_{xy} & \xi_{xz} \\ \xi_{yx} & 0 & \xi_{yz} \\ \xi_{zx} & \xi_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$i=1, j=1,2,3 \rightarrow 1.\text{sattır.}$

$\rightarrow$ tensör oldu

$\nabla \vec{U}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

gerilme tensörünün
nasil bulunacağı araş-
tılıyor.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

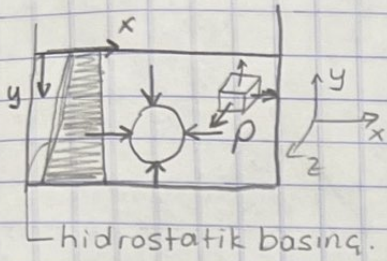
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla \vec{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}}_{e_{ij}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_{ij} \end{pmatrix}}_{\xi_{ij}}$$

* Hareket halindeki akışkan için basınç kavramı:

Durağan hâldeki akışkan için



$$\vec{\sigma} = -p \vec{I}$$

$$\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \begin{cases} i=j \Rightarrow \delta_{ij}=1 \\ i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0 \end{cases}$$

$$\sigma_{xx} = -p, \quad \sigma_{zz} = -p$$

$$\sigma_{yy} = -p$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Gerilme tensörü hareket halinde izotropik değil izotropik olmayan bir tensörü izotropik olan ve "2 tensörle ifade edebiliriz."

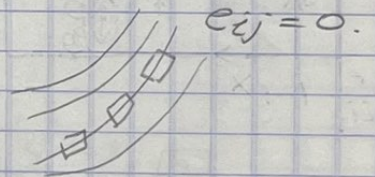
$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \overset{\text{viskoz}}{d_{ij}} \quad \text{gerilme tensörü}$$

Akışkanın katı bir cisim gibi dönmesi halinde ($\vec{e} = 0$)

Hız gradyanı $\neq 0 \Rightarrow$ viskoz gerilme tensörü vardır.

$$1) \nabla \vec{U} \neq 0 \quad \vec{d} \neq 0$$

$$\hookrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T)$$



$$2) \vec{d} = \vec{e} \quad \vec{d} = 2\mu \vec{e} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U}) \vec{I}$$

$$d_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U}) \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U}) \delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U})$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda (\nabla \cdot \vec{U})$$

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p + (2\mu + 3\lambda) \nabla \cdot \vec{U}$$

$$\frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3} = -p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \vec{U}$$

1° Stokes $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$ olması halinde basınç aritmetik ortalama.

2° sıkıştırılamaz akışkan için $\nabla \cdot \vec{U} = 0$.

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

Deneysel Hidrodinamik
Cohit ögür.

$$1^o) \vec{F} = \vec{g}$$

$$2^o) \vec{\sigma} = -p\vec{I} + \vec{\tau}$$

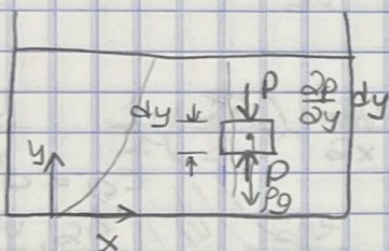
$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{e} + \lambda(\nabla \cdot \vec{U})\vec{I}$$

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu$$

15/10/1986
Çarşamba

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{U}$$



$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

statik basınç hareket halinde

$$p = p_0 + \rho \vec{g} \cdot \vec{r} + \tilde{p} \rightarrow \text{modified (değiştirilmiş) pressure}$$



$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$\Delta p = \rho \vec{g} + \nabla p$$

$$p = p_0 + \Delta p$$

$$\vec{F} = \rho \vec{g} = -(\rho_0 + \Delta \rho) \nabla \Phi \quad \vec{g} = -\nabla \Phi$$

$$= -\nabla(\rho_0 \Phi) + \Delta \rho \vec{g}$$

$$\rho_0 \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla p + \vec{F} + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$= -\nabla p - \nabla(\rho_0 \Phi) + \Delta \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

$$= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \Delta \rho \vec{g}$$

$$p = p_0 - \rho_0 \Phi + P$$

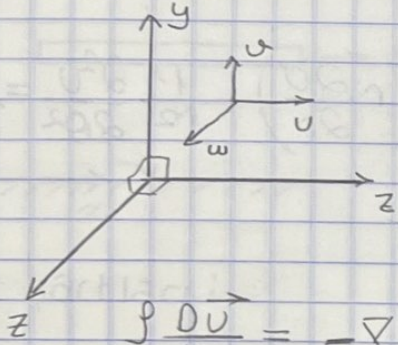
$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

sabit viskoziteli, sıkıştırılamaz akış, taşınım ivmelenmeleri

DAİMİ, TEK DOĞRULTULU AKIŞ

$$\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$$

Tek doğrultulu akış $U \neq 0, v = 0, w = 0$.



$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$U = U(y, z, t)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 U$$

$$x: \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U$$

$$y: \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$$

$$z: \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w$$

$$y: \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$x: \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U$$

$$z: \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \mu \nabla^2 \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -G(t)$$

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = G(t) + \mu \nabla^2 U$$

$$\nabla^2 U = -\frac{G}{\mu}$$

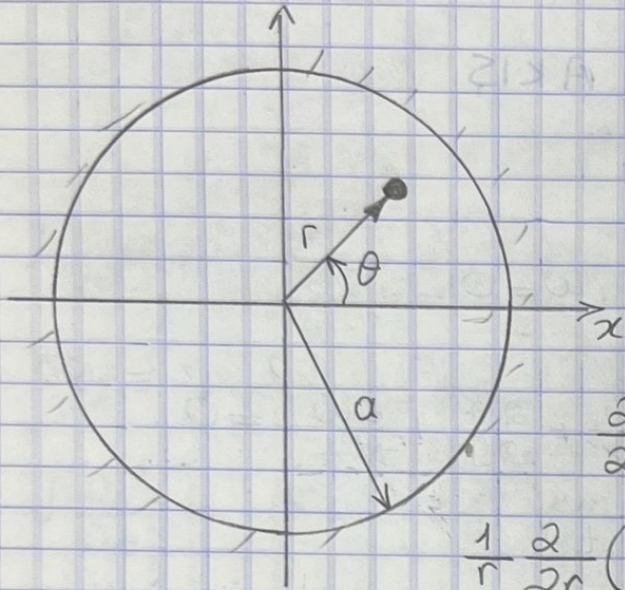
Daimi tek doğrultulu kabul.

POISEVILLE AKIŞI

$$G = - \frac{\partial p}{\partial x} = \text{sabit}$$

$$\nabla^2 U = - \frac{G}{\mu}$$

$$r=a \text{ da } U=0 \text{ (sınır şartı)}$$



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = - \frac{G}{\mu}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = - \frac{G}{\mu}$$

$$U=U(r) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{G}{\mu}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{G}{\mu} r$$

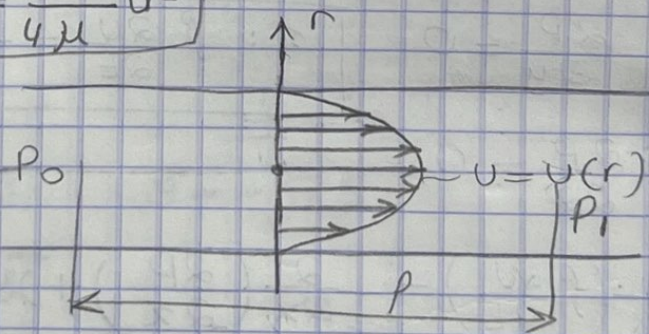
$$r \frac{dU}{dr} = - \frac{G}{\mu} \frac{r^2}{2} + A \rightarrow U = - \frac{G}{4\mu} r^2 + A \ln r + B$$

1°) $A=0$ (Aksi halde çözüm tekil olur)

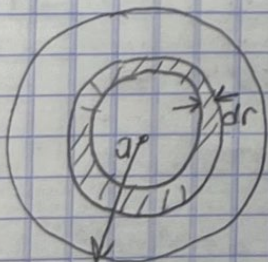
$$0 = - \frac{G}{4\mu} a^2 + B$$

$$B = \frac{G}{4\mu} a^2$$

$$U = \frac{G}{4\mu} (a^2 - r^2)$$



* Hacimsel debi



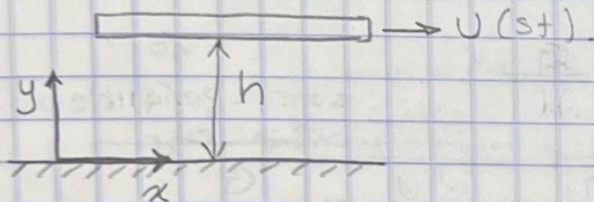
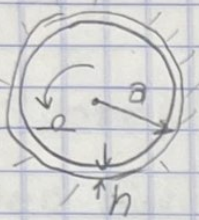
$$Q = \int_0^a U \cdot \underbrace{2\pi r dr}_{dA}$$

$$Q = \frac{\pi \cdot G \cdot a^4}{8\mu} = \frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{(P_0 - P_1)}{l}$$

17/10/1986 Cuma.

COUETTE AKIŞI

$$\frac{2\pi a}{h} = 8000$$



$$\nabla^2 U = -\frac{G}{\mu}$$

x ve z yönünde
Unun etkisi yok.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

Sınır şartları:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{G}{\mu}$$

$$G = -\frac{dp}{dx} = \text{sabit}$$

$$1^o) y=0 \rightarrow u=0$$

$$2^o) y=h \rightarrow u=U$$

Daimi akış, sıkıştırılamazlık,
tek doğrultu akış (Kabuller)

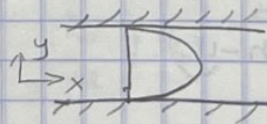
$$u = -\frac{G y^2}{2\mu} + Ay + B \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \rightarrow B=0 \\ 2) \rightarrow U = -\frac{G h^2}{2\mu} + Ah \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u = \frac{G}{2\mu} y(h-y) + \frac{Uy}{h}$$

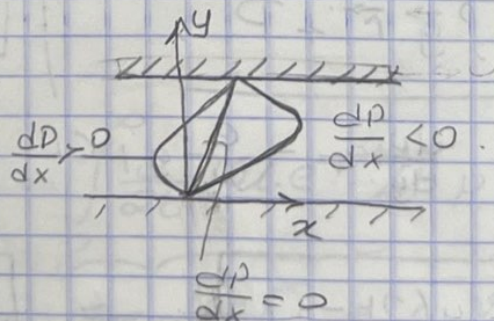
$$*1^o) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = \frac{Uy}{h}$$



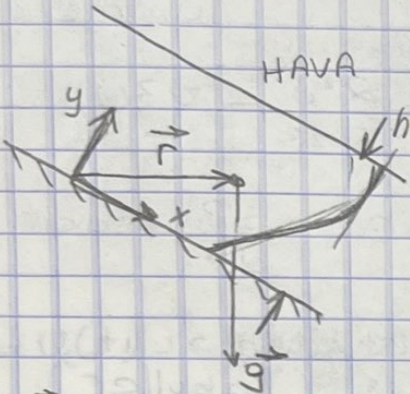
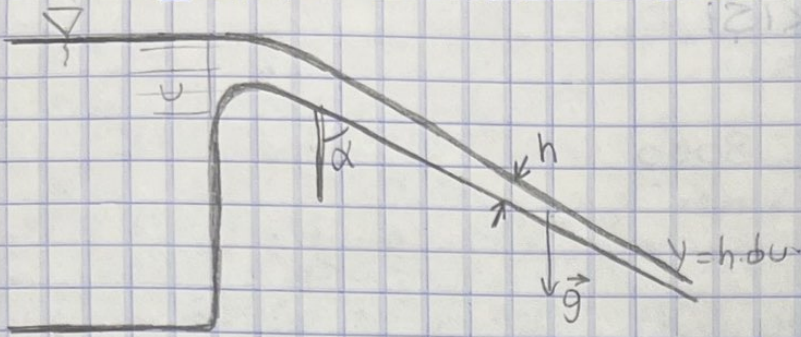
$$2^o) U=0 \rightarrow u = \frac{G}{2\mu} y(h-y)$$



$$3^o) u = \frac{G}{2\mu} y(h-y) + \frac{Uy}{h}$$



EĞİK DÜZLEM ÜZERİNDE AKIŞ



$$\nabla^2 U = - \frac{G}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \frac{G}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \frac{G}{\mu}$$

sonsuz genişlikte old.
düşünürsek

$$\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{su} = \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{hava}$$

$$1^o) y=0 \rightarrow u=0$$

$$2^o) \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \rightarrow y=h$$

$$y=h \cdot dU \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{su} = \frac{\mu_{hava}}{\mu_{su}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{hava}$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = - \frac{G}{\mu} \quad \frac{dU}{dy} = - \frac{G}{\mu} y + C_1$$

$$u = - \frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$u = \frac{G}{2\mu} y(2h-y)$$

$$p = p_0 + \rho \vec{g} \cdot \vec{r} + P$$

$$r = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{g} = g \cdot \cos \alpha \vec{i} - g \cdot \sin \alpha \vec{j}$$

$$p = p_0 + \rho g x \cos \alpha - \rho g y \sin \alpha + P$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \cos \alpha$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = - \frac{G}{\mu} \quad \frac{dU}{dy} = - \frac{G}{\mu} y + C_1 \quad u = - \frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$u = \frac{G}{2\mu} y(2h-y)$$

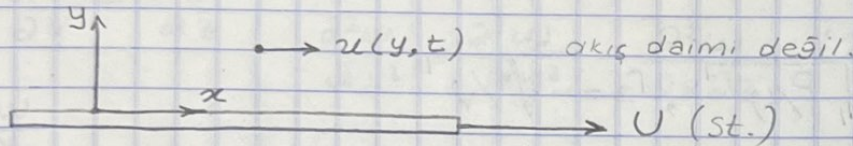
$$G = -\rho g \cos \alpha$$

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{\rho \cdot g \cdot h^3 \cdot \cos \alpha}{3\mu}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \nabla^2 u$$

1.) I. Stokes Problemi:

(Aniden hareketlendirilen düz levha)



$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Başlangıç şartı

$$y > 0 \rightarrow u(y, 0) = 0$$

Sınır şartı

$$1^\circ) t > 0 \quad u(0, t) = U$$

$$2^\circ) y \rightarrow \infty \quad u = 0 \quad (\text{viskozitenin etkisi hiçbir zaman ulaşamayacaktır.})$$

Laplace transformu:

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^\infty u e^{-pt} dt = v(y, p) \quad \text{parametre}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \cdot e^{-pt} dt = 0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathcal{L}\left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot e^{-pt}) dt + p \int_0^\infty u \cdot e^{-pt} dt \\ &= \left[u \cdot e^{-pt} \right]_0^\infty + p \cdot v(y, p) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = p \cdot v \quad \left| \quad \frac{\partial}{\partial t} (u e^{-pt}) = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot e^{-pt} - p \cdot u e^{-pt} \right.$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \frac{2}{2y^2} \underbrace{\int_0^\infty u \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt}_{\vartheta(y, p)}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \boxed{p \vartheta = \nu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}}$$

$$\vartheta = e^{ry} \rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = r \cdot e^{ry} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = r^2 \cdot e^{ry} \quad p \cdot e^{ry} = \nu r^2 e^{ry}$$

$$r^2 = \frac{p}{\nu} \rightarrow r_1 = \sqrt{p/\nu}, r_2 = -\sqrt{p/\nu}$$

$$\vartheta = C_1 \cdot e^{r_1 y} + C_2 \cdot e^{r_2 y} \rightarrow \boxed{\vartheta = C_1 \cdot e^{\sqrt{p/\nu} y} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{p/\nu} y}}$$

Sınır şartlarından $\rightarrow 2^\circ) y \rightarrow \infty u = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$$1^\circ) u(0, t) = U \quad \vartheta(0, p) = \int_0^\infty U \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

$$1^\circ) \vartheta(0, p) = \frac{U}{p} = C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta = \frac{U}{p} \cdot e^{-\sqrt{p/\nu} y} = \vartheta(y, p)}$$

Dönüşüm yaptığımız uzaydaki çözüm. Ters transform yapılarak $\rightarrow$

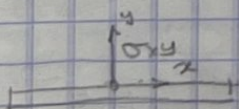
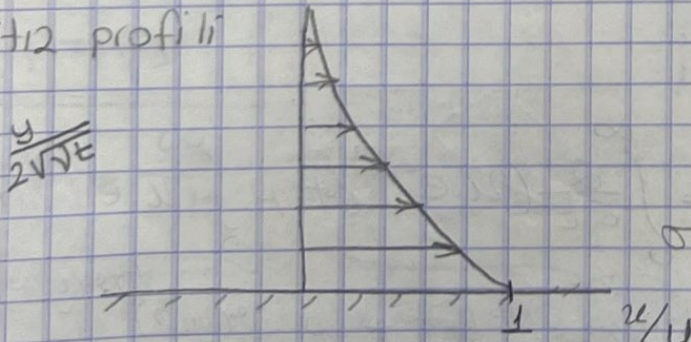
$$\mathcal{L}^{-1}(\vartheta) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{U}{p} e^{-\sqrt{p/\nu} y}\right) = u$$

$$u = U \left[1 - \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right]$$

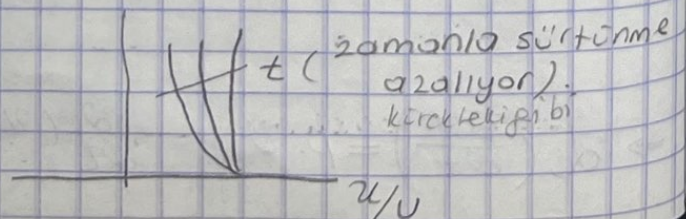
$x = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$	$\text{erf}(x)$
0	0
1	0.84
2	0.995
3	0.99995

$$\frac{u}{U} = \left[1 - \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right]$$

H12 profili



$$\sigma_{xy} = \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho \nu^{1/2} U^2 \left(\frac{\nu}{U^2 t} \right)^{1/2}$$



$$u \sim \bar{u} = \frac{a}{2b1}$$

Temel Kavramlar:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1. \text{ mertebe}) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (4. \text{ mertebe})$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \\ u = \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \quad (2. \text{ mertebe})$$

Kısmi Diferansiyel Denklem Lineerliği:

$$A() \frac{\partial u}{\partial x} + B() \frac{\partial u}{\partial y} = C()$$

$() \equiv (x, y) \Rightarrow$ K.D.D. lineerdir.

$() \equiv (x, y, u) \Rightarrow$ K.D.D. "sanki lineer"dir

$() \equiv (x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ K.D.D. lineer değildir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{Lineer.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{Sanki-lineer.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad \text{Non-lineer.}$$

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u + G = 0.$$

A, B, C, D, E, F, G en genel halde x, y, ve u'nun fonksiyonudur.

(Disk.) $B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$ KDD Hiperbolik.

$B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$ KDD Eliptik

$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ KDD Parabolik.

Difüzyon Denklemi $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (parabolik denklem)

La place denklemi, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ (Eliptik Denklem).

Eliptik KDD $(B^2 - 4AC < 0)$

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{U} = 0$$

$\vec{U} = \nabla \phi$ olarak ifade edilebilir.

Ayrıca akışkan sıkıştırılamaz ise $\nabla \cdot \vec{U} = 0 \Rightarrow$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Hız potansiyeli:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad x, y \quad \phi(x, y)$$

Eliptik Denklemin Fiziksel Anlamı: (civett calığı 2 silindirik akışın daki akış)

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$\phi(x, y)$

a : Ses hızı

Ψ : Sınır şartlarının değişim zamanını karakterize eden zaman ölçeği.

$$\frac{L}{a\Psi} \ll 1 \text{ ise } L \ll a\Psi$$

KDD lineerliği.

2 yönlü koordinat, üzerindeki bir noktada şartların, bundan her 2 tarafındaki şartlardan etkilendiği koordinat.

Eliptik bir durum. sadece 2 yönlü koordinatları içeren durumdur.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$x^2 + y^2 = 1$
Eliptik Hiperbolik

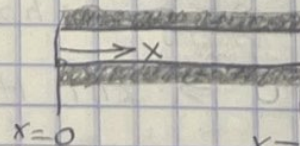
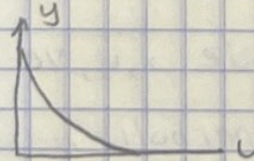
Parabolik Eliptik K.D.D.

$$B^2 - 4AC = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

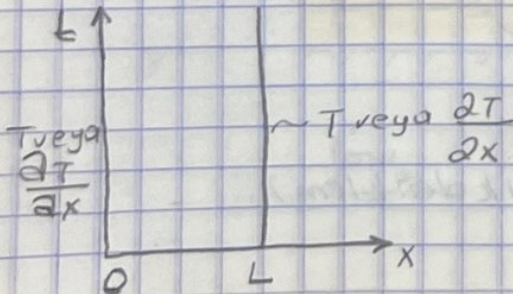
$$\alpha = \frac{K}{\rho \cdot C_p} = \frac{\text{ısı iletkenlik katsayısı}}{\text{ısı yalıtım katsayısı}} = \frac{\text{özellik}}{\text{yoğunluk}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$



Parabolik Denklem: en azından 1 tek yönlü koordinat içermeli.

bir başlangıç şartı verilmesi lazım.



- { iyi tanımlanmış
- { fazladan tanımlanmış

diff. denklem zaman içeriyorsa bu ya hip. ya da paraboliktir.
Elipitik değildir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{DALGA DENKLEMİ.}$$

Diagram of a beam of length L with a coordinate system (x, u) . The boundary conditions are $u(0, t)$ and $u(L, t)$. The partial derivative $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$ is also indicated.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} \text{ (Bastıgani) } t=0 \text{ anında}$$

Diagram illustrating a coordinate system with a vertical axis labeled t and a horizontal axis labeled x . The origin is marked 0 . A vertical line is drawn at $x=L$.

The region $0 \leq x < L$ is labeled with the expression $u_{vega} \frac{\partial u}{\partial x}$.

The region $x \geq L$ is labeled with the expression $u_{vega} \frac{\partial u}{\partial x}$ and the text "uzay koord. pankti." below it.

A bracketed box at the bottom is labeled $u_{vega} \frac{\partial u}{\partial t}$.

Hiperbolik bir çeşit tek yönlü davranışa sahiptir, ancak bu koordinat doğrultularında değil karakteristik adı verilen özel hatlar üzerindedir.

$$\alpha(x, y) u(x, y) + \beta(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \gamma(x, y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$
$$\delta(x,y) = 0 \quad \text{Homogen.}$$

$\delta(x,y) \neq 0$ Homojen değil.